

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

BAND CXLV.

I. *Ueber die Bildung des mit dem Steinsalz vorkommenden Anhydrits; von G. Rose.*

(Aus dem Monatsberichte d. königl. Akad. d. Wissensch. vom Juli 1871.  
Mit späteren Zusätzen).

In einer von Volger herausgegebenen Schrift: „Das Steinsalzgebirge von Lüneburg, ein Seitenstück von demjenigen zu Stasfurt“ führt Volger die in dem Gyps und Anhydrit von Lüneburg vorkommenden Mineralien auf, die Moderstoffe, den Eisenglimmer, Eisenkies, Borazit und Quarz, und sucht aus der Art, wie sie sich gegenseitig umschließen und begränzen, ihr Alter festzustellen. „Die Moderstoffe“, sagt er <sup>1)</sup>, „erscheinen zwar in ihren kleinsten Theilen formlos; wenn wir aber die Schweife und Wölkchen derselben ungestört nicht allein durch den Gyps und Anhydrit, sondern auch durch die eingeschlossenen Borazit-Krystalle und die Bergkrystalle hindurchziehen sehen, so können wir nicht zweifeln, daß sie älter sind, als alle diese Körper. Die Schwefelkies-Krystalle erscheinen, durch ihren engen Anschluß an die Moderstoffe und allbekannten Vorgänge, als Erzeugnisse der auf Eisensalze einwirkenden Moderung selbst. Ihr von mir beobachtetes Auftreten im Innern von Borazit-Krystallen bezeugt ihre diesen Krystallen vorausgegangene Bildung. Die rothen Schweifchen und Wölkchen des Eisenglanzes laufen ebenfalls durch die Bergkrystalle, *nicht* aber auch durch die Borazit-Krystalle hindurch und sind somit älter als jene, aber jünger als diese. Keine unmittelbare Bestimmung

1) A. a. O. S. 2.

liefs sich bis jetzt begründen für das gegenseitige Verhältniß von Moderstoffen nebst Eisenkies-Krystallen und den Eisenglanz-Blättchen, welche sich übrigens gegenseitig einigermaßen meiden; ebensowenig zwischen Bergkrystallen und Borazit-Krystallen, bei welchen Aehnliches stattfindet, so daß mir nie gelungen ist, sie miteinander in Berührung zu treffen. Dadurch aber, daß die Eisenglanz-Flitterchen nie in die Borazit-Krystalle hineinragen, vielmehr streng von diesen ausgeschlossen sind, ergiebt sich unmittelbar, daß der Eisenglanz jünger ist, als die Borazit-Krystalle; die Bergkrystalle dagegen, welche Eisenglanz sehr häufig umschließen, sind ebenso zuverlässig jünger als dieser, und somit um so mehr jünger als die Borazit-Krystalle.“

„Kein Zweifel bleibt ferner, daß der Gyps jünger ist als die Bergkrystalle und die Borazit-Krystalle. Es finden sich Beweise für das Entstehen des Gypses aus Anhydrit, sowohl durch die beobachteten Uebergänge und durch Gesteinsmassen, in welchen der bereits stofflich vollendete Gyps noch das Gefüge des Anhydrits bewahrt, auch noch Kernreste von Anhydrit umschließt, als auch durch die in der Umgebung der Borazit-Krystalle nicht selten auftretenden Anzeichen einer geschehenen Anschwellung des Gesteins, wie solches bei der in einer Wasseraufnahme bestehenden und so häufig auftretenden Umwandlung des Anhydrites in Gyps mit Nothwendigkeit erfolgen muß.“

„Die graue und rothe Färbung tritt in dem Gypse und im Anhydrite gänzlich in gleichartiger Weise auf. Wo der Anhydrit in Gyps übergeht, sieht man die Färbungen unverändert durchlaufen. Es ist also zunächst klar, daß, was jetzt weißer, grauer und rother Gyps ist, zuvor weißer und grauer und rother Anhydrit gewesen ist.“

„Aber die Bergkrystalle und Borazit-Krystalle sind ebenso entschieden älter als der Anhydrit, wie dieses aus dem Verhalten der Krystallkörperchen des letzteren zu ersteren unverkennbar hervorgeht.“

„Es ist klar, daß die Moderwölkchen, die Schwefelkies-Krystallchen, welche jetzt in den Borazit-Krystallen

und in den Bergkrystallen, und daß die Eisenglanz-Blättchen, welche jetzt in den Bergkrystallen eingeschlossen und welche nachweisbar früher als diese vorhanden gewesen sind, vor der Bildung der letztern nicht frei in der Luft oder in einer andern Flüssigkeit geschwebt haben können, sondern bei ihrer Bildung bereits eine anderweitige tragende und umhüllende Masse vorhanden gewesen seyn muß, innerhalb welcher sie ihre Stellung und Anordnung einzunehmen vermochten.“

Volger kommt nun zu dem Schluß, daß diese umhüllende Masse keine andere wie Steinsalz gewesen ist, die dann später durch Anhydrit verdrängt ist, „indem Theilchen für Theilchen gegen ein sich auflösendes Salztheilchen aus einer Lösung von schwefelsaurer Kalkerde sich abschied und an dessen Stelle setzte.“ Zum Beweise der früheren Steinsalzumgebung führt er an: „Die zahlreichen an den Borazit-Krystallen beobachteten Vertiefungen, welche ganz bestimmt die Abformung von Salzwürfelchen sind, das von ihm, wie auch früher schon von Leopold Gmelin festgestellte Vorkommen noch wohl-erhaltener Salzreste in der Nähe der Borazit-Krystalle und in jenen Vertiefungen derselben; endlich das Verhalten der Anhydrit-Krystalle gegen solche, stellenweise zwischen denselben als Ueberreste noch vorkommende Salz-Nester und sogenannte Einsprenglinge, das Auftreten desselben rothen Eisenglanzes in diesem Salze und der Schwefelkies-Krystallchen in demselben.“

Die Beobachtungen von Volger über die gegenseitige Begränzung der in dem Gypse von Lüneburg eingewachsenen Krystalle sind gewiß richtig, aber sie sind unvollständig; es kommen außer den angegebenen Verhältnissen noch andere vor, die von Volger nicht beobachtet sind, die aber die aus den Beobachtungen gezogenen Folgerungen abändern und zuletzt zu ganz andern Schlüssen führen. Nach Volger rühren alle die kleinen Höhlungen und Eindrücke, die besonders die größeren Borazitkrystalle vom Kalkberge bei Lüneburg auf ihrer Oberfläche zeigen,

von Steinsalz her; eine Behauptung, die meiner Meinung nach durchaus nicht begründet ist, denn wenn es mir auch sehr wahrscheinlich geworden ist, daß alle die grösseren mehr unregelmässigen Höhlungen in manchen der grösseren Borazitkrystalle mit Steinsalz früher ausgefüllt waren, da, wenn ich solche Krystalle einige Zeit hatte in Wasser liegen lassen, dasselbe fast immer mit salpetersaurem Silber nach einiger Zeit einen sichtbaren Niederschlag gab, in den Höhlungen also noch ein kleiner Rest von Steinsalz enthalten gewesen war (ein wohlerhaltenes Salzkorn, wie Gmelin und Volger, habe ich in diesen Höhlungen nie beobachtet), so rühren die bei weitem häufigeren kleineren und mehr regelmässigen Höhlungen, die fast in allen Borazitkrystallen vorkommen, offenbar von Anhydrit her. Derselbe kommt in kleinen rectangulären Prismen sowohl in den Borazitkrystallen als auch in dem den Borazit begleitenden Gyps vom Kalkberge eingeschlossen vor. Ich habe mehrere grosse Borazitkrystalle von diesem Fundort zerschlagen, die solche Anhydritkrystalle sehr deutlich enthielten; sie machen sich auf der glasglänzenden muschligen Bruchfläche des Borazits sehr kenntlich durch ihren starken Perlmutterglanz, ihre sehr scharfe regelmässige Begrenzung, und charakterisiren sich als Anhydrit auch noch dadurch, daß sie sich nicht im Wasser auflösen, wie auch das Wasser, worin sie gelegen, mit salpetersaurem Silber keinen Niederschlag gab und beim Glühen sich nicht verändern. In dem begleitenden Gypse, wo man sie für kleine Gypskrystalle selbst gehalten hat, bringen sie das blitzen einzelner Punkte hervor, wenn man die Bruchfläche eines solchen Stückes Gyps etwas bewegt. Ebenso sitzen sie oft noch recht erhalten auf den Borazitkrystallen und hinterlassen beim Herausnehmen der Borazitkrystalle Eindrücke in dem glattflächigen Abdruck auf dem Gyps, die ihrer Form entsprechen. Häufig sind sie aber in Gyps umgewandelt und zerstört oder ganz verschwunden, in welchem Fall ihre Eindrücke recht den



Anschein haben können, als rührten sie von Hexaëdern von Steinsalz her, was wohl zu Täuschungen Veranlassung geben kann, und auch wohl Volger getäuscht haben mag. Viel häufiger und gröfser finden sich die wohlerhaltenen Anhydritkrystalle auf dem in Combinationen mit vorherrschenden Tetraëderflächen krystallisirten Borazit vom Schildstein bei Lüneburg, wo überhaupt der Anhydrit in viel gröfseren Krystallen vorkommt; sie ragen dann in dem Borazit als ältere Bildung, und von dem Borazit zum Theil umschlossen hinein. Es ist demnach offenbar, dafs es der Anhydrit ist, der die vielen kleinen Höhlungen in dem Borazit hervorgebracht hat, und nicht das Steinsalz.

Rother Eisenglimmer, der nach Volger in dem Borazit nie vorkommt, habe ich in unter dem Mikroskop erkennbaren, netten, deutlichen sechsseitigen Täfelchen krystallisirt, in klaren durchsichtigen Borazitkrystallen sowohl vom Kalkberge als auch vom Schildstein, nicht blofs in dem Borazit dieser Fundörter, sondern auch in dem von Segeberg eingewachsen gefunden.

Quarzkristalle kommen allerdings selten mit Borazitkrystallen vor; sie finden sich vorzugsweise im Kalkberge, kommen aber hier nicht mit dem Borazit zusammen vor, wenigstens enthalten alle Gypsstücke von diesem Berge, die sich in dem berliner mineralogischen Museum finden, wenn in ihnen Borazit vorkommt, keinen Quarz, und umgekehrt. Am Schildstein aber kommen die Quarzkristalle, wenn auch von geringerer Gröfse, mit den Borazitkrystallen vor, und hier habe ich schon 5 Borazitkrystalle gefunden, die Quarzkristalle so eingeschlossen enthalten, dafs sie zum Theil aus dem Borazit hervorragen. Die Fälle sind so deutlich, der Quarz ist so bestimmt von dem Borazit umschlossen, dafs man hier nicht daran zweifeln kann, dafs der Quarz älter als der Borazit ist. Hier am Schildstein kommen auch Quarzkristalle ganz bestimmt mitten im blättrigen Anhydrit, sowie auch im blättrigen Gypse eingewachsen vor, und in beiden Fällen so, dafs sie beim

Herausnehmen aus ihrer Umhüllung ganz glatte Höhlungen in denselben hinterlassen, was mit den Volger'schen Beobachtungen übereinstimmt.

Was nun das Verhältniß des Anhydrits zum Gypse betrifft, so hat der erstere überall, wo er mit Steinsalz vorkommt, so wenig den Charakter einer ursprünglichen Bildung, so daß ich mich veranlaßt sehe, auch das Ansehen desselben von einigen andern Orten als von Lüneburg, nach den im mineralogischen Museum befindlichen Stücken näher anzuführen.

#### Anhydrit von Tiede bei Braunschweig.

Der Anhydrit ist hier eine grobkörnige Masse, deren körnige Zusammensetzungsstücke von etwa Erbsengröße mit rauher Oberfläche wiederum aus kurzstrahligen, sich um den Mittelpunkt radial verbreitenden Zusammensetzungsstücken bestehen und in dem Mittelpunkt einen Kern von einer dichten Masse haben <sup>1)</sup>, von lichte graulich- bis blaulichweißer Farbe und Perlmutterglanz. In dieser körnigen Masse liegen einzelne Krystalle von Anhydrit, deren nahe quadratische und rectanguläre Durchschnitte auf der Bruchfläche des Gesteins, die erstern 1 bis 1½ Linie breit, die letztern 2 bis 3 Linien lang erscheinen. Sparsamer finden sich darin noch einzelne unregelmäßig begränzte Körner von Steinsalz.

Der Anhydrit giebt vor dem Löthrohr im Kolben nur Spuren von Wasser. Geglüht wird er schneeweiß; die stängligen Stücke erscheinen unter dem Mikroskop noch durchsichtig und zeigen die Form des Anhydrits. Läßt man das geglühte Pulver unter Wasser stehen, so bilden sich neben dem Anhydrit einige unter dem Mikroskop sichtbare Krystalle von Gyps. Gepulvert und mit Wasser begossen, giebt dasselbe, auch wo die Masse kein sichtbares Steinsalz eingemengt enthält, mit salpetersaurem

1) In einem Dünnschliff unter dem Mikroskop erscheint dieser Kern als eine Zusammenhäufung von lauter Anhydritkörnern.

Silber einen Niederschlag, und wenn die Masse einige Zeit mit Wasser gestanden hat, auch mit Chlorbaryum.

Die Masse besteht also vorzugsweise aus Anhydrit, die außer einigen größern Körnern von Steinsalz, dem Auge nicht sichtbare Theile von Steinsalz und Gyps in geringer Menge beigemischt enthält.

#### Anhydrit von Segeberg in Holstein.

Er besteht aus übereinander liegenden mehr oder weniger gekrümmten Lagen, die 2 bis 3 Linien dick sind und aus dünnstängligen Zusammensetzungsstücken bestehen, die gegen die Oberfläche der Lagen rechtwinklig geneigt sind. In dem Querbruche der Lagen sieht man hier immer eine Gränze, in der die stängligen Stücke von der obern und untern Seite zusammenstoßen, die oft eine gewisse Dicke hat, und aus einer dünnen Schicht körnigen Anhydrits besteht, die graulichweiß und durchscheinend ist, während die stängligen Stücke schneeweiß sind. In dem Querbruch haben diese Lagen ganz das Ansehen wie der in Platten gegossene Zucker (die sog. Bonbons) im Querbruch, wenn er einige Zeit gelegen hat und nun krystallinisch geworden ist; er wird dann auch faserig, und die Fasern stehen senkrecht auf der Oberfläche der Platten, und stoßen in der Mitte zusammen. Zwischen diesen Platten oder Lagen von faserigem Anhydrit liegen nun ganz unregelmäßig große durchsichtige Krystalle von Anhydrit, einen halben bis dreiviertel Zoll lange reéctanguläre Prismen. Sie durchsetzen die Lagen nach allen Richtungen, werden von diesen umschlossen, und verhalten sich überall als die früher gebildeten. Sie sind wie überall, nach allen Flächen des geraden reéctangulären Prismas sehr vollkommen spaltbar, sind stets nach einer Richtung, die der Kante zwischen der ersten und dritten Spaltungsfläche *T* und *P* parallel geht<sup>1)</sup>, verlängert; die erste Spaltungsfläche *T* bildet die eine breitere Seitenfläche, die dritte *P* die andere gewöhn-

1) Vergl. Hessenberg's Abhandlung über den Anhydrit in den Abh. d. Senkenberg'schen naturf. Ges. in Frankfurt a. M. B. VIII.

lich schmalere, und die zweite Spaltungsfläche *M* die Endfläche. Die Krystalle lösen sich oft von der Masse, worin sie sitzen, mit ganz glatten Flächen ab, und so sieht man auf der Bruchfläche des Stückes theils fast quadratische Eindrücke der Endfläche der Krystalle, theils rectanguläre von den Seitenflächen; die der dritten Spaltungsfläche entsprechende Seitenfläche der Krystalle fand ich immer matt.

Der fasrige Anhydrit ist nicht mehr ganz frisch; er giebt im Kolben, vor dem Löthrohr erhitzt, stets etwas Wasser, wird schneeweiss und leicht zerreiblich; aber die zerdrückte Masse unter dem Mikroskop betrachtet, erscheint in rectangulären Prismen und ist noch durchsichtig, wenn auch mit schwarzen Rissen durchsetzt, und mit schwarzen Punkten erfüllt. Dieser Anhydrit ist also schon etwas zersetzt, hat Wasser aufgenommen, und ist zum Theil in Gyps umgeändert. Vielleicht ist auch noch etwas Gyps zwischen den stängligen Stücken und zwischen den Lagen enthalten, denn gepulvert und einige Zeit in Berührung mit Wasser gelassen, löst dieses auch etwas Gyps auf, und die Auflösung giebt mit Chlorbarium einen starken Niederschlag; aber sie giebt auch mit salpetersaurem Silber eine leise Trübung, zum Zeichen, daß auch etwas Steinsalz darin enthalten ist.

Das mineralogische Museum besitzt 3 Stücke von der beschriebenen Art; sie enthalten keine Borazitkrystalle, wenigstens habe ich sie nicht darin gesehen. Das Museum enthält ausserdem noch viele andere Stücke, in welchen hier und da einzelne kleine Borazitkrystalle sitzen, die bekanntlich immer Hexaëder mit nur schwachen Abstumpfungsflächen der Kanten und abwechselnden Ecken sind, und diese haben eine etwas andere Beschaffenheit. Die Lagen von fasrigem Anhydrit sind nicht so dick und groß, oft gleich breit wie lang; sie liegen auch oft noch in paralleler Richtung übereinander, doch unregelmässiger wie bei den vorigen Stücken; die Masse des körnigen Anhydrits zwischen den Lagen ist grösser, und mehr massenweise zusammengehäuft, zwischen den Fasern aber meisten-

theils sehr dünn, so daß die Gränze zwischen den obern und untern Fasern gewöhnlich nur als feine Linie erscheint. Die Borazitkrystalle liegen meistentheils in dem körnigen, zuweilen auch in dem fasrigen Anhydrit, immer nur sparsam. Die langen prismatischen Krystalle von Anhydrit fehlen. Kleine Stücke im Kolben untersucht, geben nur Spuren von Wasser; der fasrige Anhydrit wird auch hier schneeweiß, der körnige behält Glanz und Durchsichtigkeit und die mehr graulichweiße Farbe.

Anhydrit von Stasfurt aus 104 Lachter Teufe des Kunstschachts von der Heydt.

Die Stücke dieses Fundorts bestehen aus 2 bis 3 Linien dicken gekrümmten Lagen dickstängligen Anhydrits von der Beschaffenheit wie in Segeberg, doch von lichte blaulichgrauer Farbe; sie sind dabei stark durchscheinend, perlmutterglänzend und von sehr frischem Ansehn. Das zeigt auch das Verhalten des Anhydrits vor dem Löthrohr, da er im Kolben erhitzt, kein Wasser giebt; er wird zwar dabei schneeweiß, behält aber Glanz und Festigkeit. Die Lagen schliessen unregelmäßig begränzte Räume von körnigem Anhydrit ein von stellenweise graulichbrauner Farbe, mehr aber noch längliche Räume, die hohl und nur an den Wänden mit nadelförmigen, durch eingemengten Eisenglimmer ganz roth gefärbten zwei bis drei Linien langen Krystallen von Anhydrit besetzt oder mit weißem Steinsalz ausgefüllt sind. Vielleicht waren die ersten Räume früher auch mit Steinsalz ausgefüllt, das später ausgewaschen ist.

Anhydrit aus dem ehemaligen sog. Rathsteinbruch bei Stasfurt, in welchem jetzt der Anhalt'sche Schacht abgeteuft ist.

Der Anhydrit dieses Fundorts hat, nach den Stücken zu urtheilen, die Hr. Dr. Ewald an Ort und Stelle selbst gesammelt und mir zur Untersuchung gefälligst mitgetheilt hat, ganz das Ansehen des Tieder Anhydrits; er besteht hauptsächlich aus erbsengroßen körnigen Theilen, die aus

radial stängligen Zusammensetzungsstücken bestehen, nur selten sieht man darin aus solchen stängligen Stücken bestehende plattenförmige Massen. Darin liegen aber Stücke blättrigen durch eingemengten Eisenglimmer ganz roth gefärbten Gypses, die oft noch eine ganz regelmäßige Form haben, und zwar die der Spaltungsstücke des Gypses. Es sind rhomboidale Tafeln mit Winkeln von  $114^{\circ} 24'$ , deren Seiten über zolllang sind. In diesen sind aber von den Seiten nadelförmige Krystalle von Anhydrit eingewachsen, sich von Punkten des Randes radial verbreitend, aber auch von Punkten, die wenn auch zunächst dem Rande, doch ganz im Gypse liegen, so daß nur die Mitte desselben ganz frei von eingemengtem Anhydrit ist. Andre Stücke von dem rothen Gypse sind auch ganz unregelmäßig begränzt, und wenn sie klein sind, mit kleinen Anhydritnadeln ganz durchwachsen. Erhitzt man einen solchen Gyps über der Gaslampe, so wird er ganz weiß, erdig, und läßt sich leicht zerdrücken, aber in dem Pulver erkennt man unter dem Mikroskop sehr gut die durchsichtig gebliebenen nadelförmigen Krystalle des Anhydrits. Bei mehreren der mir mitgetheilten Stücke ist auch die verwitterte Oberfläche zu sehen; dieselbe ist voller Höhlungen, die an den Wänden mit kleinen Anhydritnadeln besetzt sind, offenbar waren diese mit Gyps erfüllt, der von den Tagewässern aufgelöst und fortgewaschen ist.

#### Anhydrit vom Schildstein bei Lüneburg.

Ein parallelepipedisches Stück des mineralogischen Museums über fußlang, enthält 4 Linien dicke Lagen, die über die ganze 6 Zoll große Breite des Stückes in mehr oder weniger gerader Linie fortlaufen. Sie sind fasrig, die Fasern rechtwinklig auf der Oberfläche der Lagen, und stoßen in der Mitte ohne sichtbare Zwischenlagerung von körnigem Anhydrit zusammen; stark seidenglänzend, graulichweiß und sehr frischen Ansehns. Die Lagen liegen häufig dicht übereinander, oder es liegt dazwischen in größerer oder geringerer Menge ein körniger Anhydrit,

von kohligen schwarzen Adern durchzogen, die auch oft die Lagen einfassen, und ferner blättriger durch Eisenglimmer roth gefärbter Gyps, oft ein über zollgroßes unregelmäßig begränztes Individuum, das den Raum ganz ausfüllt und bei welchem dann der Eisenglimmer besonders in der Mitte angehäuft ist oder das in der Mitte einen Drusenraum hat, der an den Wänden mit von rothem Eisenglimmer bedeckten Gypskrystallen besetzt ist. Zuweilen sieht man auch zwischen den Lagen großen blättrigen Anhydrit, auch einzelne fast wasserhelle regelmäßig begränzte Krystalle, die fasrigen Lagen in allen Richtungen durchsetzend, wie bei dem Segeberger Anhydrit. Die Borazitkrystalle liegen in den fasrigen Lagen, einzeln oder oft in großer Menge dicht nebeneinander, auch in Gruppen zusammengehäuft; sie finden sich aber auch in dem blättrigen Anhydrit und Gyps, in beiden beim Herausnehmen glatte und glänzende Eindrücke hinterlassend. Kleine Hexaëder von Eisenkies kommen zuweilen in und neben den oben erwähnten kohligen Adern vor. Der fasrige Anhydrit giebt vor dem Löthrohr im Kolben etwas Wasser, wird schneeweiß, bleibt aber glänzend und unter dem Mikroskop durchsichtig.

An andern Stücken dieses Fundorts sieht man gar keinen Eisenglimmer und Gyps; zwischen den fasrigen Lagen befinden sich größere in die Länge gezogene hohle Räume, von oft größerer Dicke als die Lagen selbst, die an den Wänden mit kleinkugligem Anhydrit mit rauher Oberfläche, der oft Krystalle von Anhydrit umschließt, besetzt sind, oder andere kleinere, die mit reinem durchsichtigen Steinsalz ganz ausgefüllt sind. Die ersten Räume sind auch mit bloßen Anhydritkrystallen besetzt, die von einer Wand des Drusenraums nach der andern herübergewachsen und wie bei den Segeberger Krystallen in der Richtung der Kante der ersten und dritten Spaltungsfläche verlängert sind, auch wohl Abstumpfungflächen der Seitenkanten enthalten, die ich aber stets matt befunden habe, so daß sie nicht gemessen werden konnten.



Wieder in andern Stücken ist sehr viel durch Einmischung von Eisenglimmer roth gefärbter Gyps enthalten; die fasrigen Lagen, die in allen solchen Stücken mehr graulichweifs gefärbt sind, entfernen sich häufig von einander, und schliessen unregelmässige längliche Räume ein, die mit durch Eisenglimmer roth gefärbten Gypskrystallen besetzt sind, welche nett krystallisirt in den rhombischen Prismen von  $111^{\circ} 14'$ , mit breit abgestumpften scharfen Seitenkanten und an den Enden mit den vordern und hintern schiefen Prismen begränzt sind; sie haben in einem Drusenraum überall eine parallele Lage und schillern prächtig, da sie auch äusserlich mit Eisenglimmer bedeckt sind. Zuweilen füllt auch der Gyps in einem Individuum den Raum ganz aus, und enthält dann an den Wänden fasrigen Anhydrit in kleinen kugligen Zusammenhäufungen wie bei den Stücken aus dem Rathsteinbruch von Stasfurt. Einzelne Anhydritkrystalle kommen in und zwischen den fasrigen Lagen vor. Die Borazitkrystalle sitzen in diesen wie auch im blättrigen Anhydrit und Gyps und oft in grosser Menge und von verschiedener Grösse. Zuweilen kommen auch in diesen weisse Quarzkrystalle vor, doch stets nur von geringer Grösse. In Stücken dieser Art habe ich auch die oben S. 181 erwähnten Borazitkrystalle mit eingeschlossenen Quarzkrystallen gefunden.

#### Gyps vom Kalkberge bei Lüneburg.

Ebenso wie die Borazitkrystalle des Schildsteins von denen des Kalkberges ganz verschieden sind, bei erstern die Tetraëderform vorherrscht, bei letztern die des Hexaëders, so ist auch das Gestein, worin die Krystalle beim Kalkberg eingewachsen sind, wesentlich von dem des Schildsteins verschieden. Es ist überall nur ein feinkörniger Gyps, worin ganz kleine Krystalle des Anhydrits porphyrartig eingeschlossen sind; zuweilen ist er auch mit Rissen durchsetzt, und auf diesen finden sich lauter Anhydritkrystalle, wie die in der Masse eingeschlossenen, nie lang prismatisch, sondern hexaëderähnlich. Glüht man

Stücke dieses Gypses im Platintiegel, so wird er weiß und undurchsichtig, die eingeschlossenen Anhydritkrystalle behalten aber ihren Glanz und ihre Durchsichtigkeit, und können nun um so leichter erkannt werden<sup>1)</sup>. Die Borazitkrystalle unterscheiden sich außer ihrer Form auch durch ihre Gröfse; sie übertreffen darin die des Schildsteins bedeutend; die Eindrücke, die sie auf der Oberfläche haben, sind daher auch gröfser und deutlicher als bei diesen. Sie rühren von Anhydrit her, zum Theil auch von Gyps, welche beide auf der Oberfläche noch erhalten sind, und von denen Anhydritkrystalle häufig, zweifelhafter Gyps im Innern eingeschlossen sind. Ebenso kommt etwas Eisenglimmer in den Borazitkrystallen eingeschlossen vor, seltener jedoch in diesen als in denen des Schildstein, wie oben schon angegeben. Die Borazitkrystalle des Kalkberges lösen sich leicht von dem Gypse, in welchem sie eingeschlossen sind, ab; die Eindrücke in diesem sind glatt, aber die glatten Flächen der Eindrücke haben doch oft viele Zwischenräume, denn jede Fläche wird durch lauter kleine in paralleler Richtung nebeneinander liegende Gypskrystalle gebildet, die sämmtlich an der angränzenden Fläche des Borazits abschneiden. Zuweilen hat sie, wie auch oben angegeben, kleine Erhabenheiten, die von den in den Gyps eingemengten Anhydritkrystallen herrühren, der dann die Eindrücke in dem Borazit verursacht hat. Die Borazitkrystalle des Kalkberges sind durchsichtig bis stark durchscheinend und stark glänzend, wenn sie frisch sind, sie erscheinen aber häufig trüb und undurchsichtig, und bestehen dann im Innern aus fasrigen Zusammensetzungsstücken, die auf den Dodekaëderflächen rechtwinklig stehen<sup>2)</sup> und sind dann in Pseudomorphosen von Stasfurtit umgeändert. Sie finden sich auch nur am Kalkberge, und fehlen ganz dem Schildstein. Die gröfsern

1) Der Anhydrit fehlt also keineswegs in dem Gyps des Kalkberges, wie häufig angegeben; vgl. Zeitschr. d. geol. Ges. von 1853, S. 367.

2) Sie sind in der Monographie des Borazits von Volger S. 203 bis 229 sehr ausführlich beschrieben.

rauchgrauen Quarzkrystalle kommen in einem Gypse vor, wie der ist, welcher die beschriebenen Borazitkrystalle enthält, wiewohl sie nicht zusammen vorkommen. Auch wird der Kalkberg immer als Fundort der Quarzkrystalle angesehen; daß aber auch am Schildstein Quarzkrystalle vorkommen, ist oben angeführt.

Aus dem Angegebenen ergibt sich, daß der sämtliche fasrige Anhydrit, der in Tiede, Segeberg, Stasfurt, Lüneburg vorkommt, eine secundäre Bildung ist und sein Zusammenvorkommen mit Gyps zeigt deutlich, daß er aus diesem hervorgegangen ist. Daß solche Umänderungen von Gyps in Anhydrit auch künstlich dargestellt werden können, darüber haben uns die schönen Versuche von Hoppe-Seyler belehrt<sup>1)</sup>. Er erhitzte krystallisirten Gyps (Marienglas) in einer Glasröhre mit Wasser in Oel bis zu einer Temperatur von 140°; das Marienglas verlor dadurch seine Durchsichtigkeit, zerklüftete zu seidenglänzenden Fasern, und war nun in eine Verbindung von schwefelsaurem Kalk mit nur ein halb Atom Wasser  $\text{CaS} + \frac{1}{2} \text{H}$  umgewandelt. Als er dies in kaltem Wasser liegen ließ, überzogen sich die glänzenden Fasern bald mit einer dichten Vegetation von Gypskrystallen.

Als er das Marienglas in einer gesättigten Steinsalzlösung bis 125 bis 130° erhitze, zerklüftete dasselbe auch erst in seidenglänzende Fasern, wurde aber bald darauf in eine porzellanartige milchweiße derbe Masse verwandelt, die nur Spuren von Wasser enthielt, ein spec. Gew. 2,937 hatte und unter dem Mikroskop aus lauter kleinen rectangulären Prismen bestand, also Anhydrit war.

Ich habe die Versuche nachgemacht. Hr. Prof. Hofmann verstattete gern, daß sie in seinem Laboratorium mit seinen Apparaten angestellt wurden, und Hr. Dr. Bannow war so gefällig, sie in meinem Beisein auszuführen. Zwei starke, an einem Ende zugeschmolzene Glasröhren von etwa 1½ bis 2 Fuß Länge wurden zu zwei Drittheil,

1) Pogg. Ann. 1866 Bd. 127, S. 161.

die eine mit einer concentrirten Auflösung von Chlornatrium, die andere mit Wasser gefüllt, dann in beide mehrere Stücke krystallisirten Gypses gelegt, die Röhren an dem offenen Ende zugeschmolzen, und nun in zwei eiserne Röhren gelegt, und in einem Luftbade bis zu einer Temperatur von 120 bis 130° erhitzt. Nach Verlauf von mehreren Stunden, nach welchen das hineingethane Marienglas ganz schneeweifs geworden war, liefs man die Röhren erkalten. Die Chlornatriumlösung der einen Röhre gab mit Chlorbaryum einen Niederschlag, und als ich sie in einem Becherglase eintrocknen liefs, bildete sich ein dünner weifser, mit Chlornatriumkrystallen reichlich bedeckter Bodensatz. Unter dem Mikroskop betrachtet, bestand derselbe aus lauter kleinen Gypskrystallen, die Chlornatriumlösung hatte also auch etwas aufgelösten Gyps enthalten<sup>1)</sup>.

Das Marienglas, welches ich in die Röhren hineingelegt hatte, bestand aus durchsichtigen Bruchstücken von Krystallen, die mit den drei Spaltungsflächen des Gypses begränzt waren; sie hatten also die Form von geraden rhomboïdischen Tafeln mit Winkeln von 114° 24'. Die Spaltungsflächen nach dem rhomboïdischen Prisma sind bekanntlich nur unvollkommen und von sehr verschiedenem Ansehen; die eine ist von fasriger Beschaffenheit<sup>2)</sup>, die

- 1) Ich hatte indessen den Versuch mit dem Chlorbaryum erst den folgenden Tag nach der Erhitzung des Marienglases gemacht; bis dahin war die Chlornatriumlösung in der Röhre über dem Marienglase geblieben. Es konnte daher seyn, dafs von dem gebildeten Anhydrit sich nach dem Erkalten in der Chlornatriumlösung wieder etwas aufgelöst hätte. Hr. Dr. Bannow erbot sich daher mit liebenswürdiger Bereitwilligkeit, den Versuch in der Röhre noch einmal zu machen, und die noch heifs aus der Röhre genommene Chlornatriumlösung auf Gyps zu untersuchen. Er fand, dafs auch in diesem Fall mit Chlorbaryum sogleich ein Niederschlag entstand. Es löst sich also in der That gleich bei der Anhydritbildung schon etwas Gyps auf. Wahrscheinlich enthält auch das Wasser, welches mit Marienglas in der Röhre erhitzt ist, etwas Gyps aufgelöst, was ich zufällig zu untersuchen unterlassen habe.
- 2) Das fasrige Ansehen dieser Spaltungsfläche entsteht bekanntlich daher, dafs sich in dieser Richtung eigentlich drei Spaltungsflächen finden,

andere springt oft in den muschligen Bruch über; man bezeichnet die beiden Spaltungsflächen gewöhnlich mit dem Namen des fasrigen und muschligen Bruches. In der Richtung des erstern ist der Gyps auch biegsam, und beim Zerbrechen der Bruchstücke, um sie in die Röhren zu legen, bogen sich die meisten Stücke, was nun ein gutes Mittel abgab, um die beiden Flächen, die dem fasrigen und muschligen Bruch entsprechen, auch nach dem Erhitzen, wodurch ihre eigenthümliche Beschaffenheit verloren ging, zu erkennen. Sowohl das in dem Wasser als in der Chlornatriumlösung erhitze Marienglas war schneeweiss, undurchsichtig und fasrig und zwar parallelfasrig geworden; die Fasern gingen nicht, wie man erwarten sollte, dem fasrigen, sondern stets dem muschligen Bruche parallel. Bei dem in Wasser erhitzten Marienglas gingen die Fasern ohne Unterbrechung durch das ganze Stück hindurch, und hatten starken Seidenglanz, bei dem im Chlornatrium erhitzten waren die Fasern feiner und kürzer, und wenn auch im Allgemeinen der angegebenen Richtung folgend, waren mehrere oft büschelförmig, ja sogar radial gruppirt; auch waren sie matt und von geringem Glanz. Unter dem Mikroskop betrachtet, waren die Fasern der einen Röhre wie der andern durchsichtig, ganz besonders die im Wasser erhitzten, und beide erwiesen sich nach den Beobachtungen des Dr. Groth, der sie auf meine Bitte im polarisirten Lichte untersuchte, rhombisch und durchaus nicht monoklinisch wie der Gyps.

Es bedarf aber gar nicht so grosser Hitze, um das Marienglas in Anhydrit umzuändern. Ich habe Stücke Marienglas nur kurze Zeit in der Platinschale mit einer Chlornatriumlösung gekocht; die Stücke wurden dadurch nur an den Rändern umgeändert, und die Fasern von Anhydrit waren besonders von der Seite des muschligen Bruchs hineingedrungen, wie bei dem in der Röhre er-

nach einem rhombischen Prisma von  $138^{\circ} 44'$ , und nach der geraden Abstumpungsfläche der stumpfen Kante dieses Prismas, und die Spaltungsfläche nun aus der einen Richtung stets in die andere überspringt.

hitzten Marienglas. Die Stücke gleichen aufs Vollkommenste dem oben beschriebenen nur zum Theil verändertem Marienglas aus dem Rathsteinbruch bei Stasfurt. Als ich Gypspulver auf diese Weise behandelte, änderte sich der ganze Gyps in kleine prismatische Anhydritkrystalle um, und als ich eine concentrirte Auflösung von Gyps mit einem gleichen Raumtheile einer concentrirten Steinsalzlösung mischte, und in der Platinschale abdampfte, erhielt ich ebenfalls die Anhydritkrystalle, doch waren sie mikroskopisch klein, und die abgedampfte Masse schien sich ganz in Wasser aufzulösen; wenn ich aber etwas von derselben auf eine Glasplatte legte und mit Wasser befeuchtete, konnte ich unter dem Mikroskop sehr bestimmt die kleinen prismatischen Krystalle des Anhydrits neben den Chlornatriumhexaëdern erkennen, und nun auch in der Platinschale nach der Auflösung der abgedampften Masse in Wasser den kleinen Rückstand von Anhydrit erkennen und sammeln. Dr. Groth hat auch diese so dargestellten Anhydritkrystalle im polarisirten Lichte untersucht, und mit den in der Röhre dargestellten ganz übereinstimmend gefunden. Legt man eine kleine Menge der in der Platinschale abgedampften Masse auf eine Glasplatte, befeuchtet sie mit so vielem Wasser, daß das Chlornatrium sich auflösen kann, läßt man dann das Wasser auf der Glasplatte verdunsten, und betrachtet die Masse unter dem Mikroskop, so sieht man, daß sich sämmtlicher Anhydrit wieder in Gyps umgeändert hat. Bei größern Anhydritkrystallen und bei gepulvertem natürlichen Anhydrit ändert sich nicht aller Anhydrit um, Gyps aber bildet sich stets. Gyps ändert sich also mit Chlornatriumauflösung bei höherer Temperatur in Anhydrit um, wie Anhydrit bei niedriger Temperatur in Gyps. Ueberläßt man die oben erwähnte Mischung einer Gypslösung und Chlornatriumlösung der freiwilligen Verdunstung, so bilden sich Krystalle von Chlornatrium und von Gyps, letztere nur von geringer Größe und nadelförmig, aber doch ganz deutlich und schon mit bloßen Augen erkennbar und bestimmbar.

Es ist also keine Frage mehr, daß der Gyps sich mit Hülfe von Chlornatrium in Anhydrit umändern kann, und man kann sich nur darüber wundern, daß bis jetzt noch gar keine Pseudomorphosen von Anhydrit in deutlicher Gypsform bekannt geworden sind. Sie kommen aber nichts desto weniger vor, und ich habe dergleichen über zollgroße Pseudomorphosen an Anhydritstücken von Sulz am Neckar beobachtet. Der hier vorkommende Anhydrit ist smalteblau, dicht, mit splittrigem Bruch, oft aber auch kurz- und verworrenfasrig. Die Pseudomorphosen sitzen zu mehreren auf einem Stücke und lassen die Form des Gypses ganz deutlich erkennen, niedrige rhombische Prismen mit Winkeln von  $111^{\circ} 14'$ , die an den scharfen Seitenkanten stark abgestumpft und an den Enden mit dem bekannten vordern und hintern Prisma begränzt sind. Die Flächen sind glatt; im Bruche haben die Pseudomorphosen dasselbe Ansehen wie die derbe Masse.

Wenn man sich hiernach der Ueberzeugung nicht verschließen kann, daß der fasrige Anhydrit an den genannten Orten aus Gyps entstanden ist, so kann doch diese Art der Entstehung nicht auf die großen Krystalle von Anhydrit angewandt werden, die namentlich in Segeberg und am Schildstein vom fasrigen Anhydrit umschlossen werden. Zwei so verschiedene Formen einer Substanz können nicht zu gleicher Zeit gebildet seyn. Die großen Krystalle von Anhydrit müssen schon da gewesen seyn, als sich der Gyps bildete, welcher sich später in Anhydrit umänderte. In dem Kalkberge bei Lüneburg findet sich der fasrige Anhydrit nicht. Die Masse des Berges ist, nach den Stücken zu urtheilen, die sich in dem berliner mineralogischen Museum finden, wie oben angegeben, ein Gemenge von vorherrschendem Gyps mit kleinen Krystallen von Anhydrit. Diefß ist wahrscheinlich der Zustand, in welchem sich auch die übrigen Gypsberge zu Tiede, Segeberg und der Schildstein befunden haben, nur mit dem Unterschiede, daß sich hier noch größere Krystalle von Anhydrit gebildet haben. Bei ihnen ist dann später der



Gyps in Anhydrit umgeändert, was bei dem Kalkberge nicht der Fall ist, der also noch die ursprüngliche Bildung abgiebt. Mit den Krystallen von Anhydrit haben sich ziemlich gleichzeitig oder vor ihnen Eisenkies, Eisenglimmer, Quarz und Borazit ausgeschieden. Da es vielleicht nur von geringen Unterschieden der Temperatur abhängt, ob sich Anhydrit oder Gyps bildet, so mögen an den angegebenen Orten beide wohl an der Gränze für die Bildung des einen und des andern entstanden seyn; eine geringe Erniedrigung der Temperatur mag zuerst eine weitere Anhydritbildung verhindert und eine Gypsbildung hervorgebracht haben, die sich dann wieder bei etwas erhöhter Temperatur ganz oder zum Theil in Anhydrit umänderte. Warum von dieser letzten Veränderung der Kalkberg, in dem sich gar kein fasriger Anhydrit mehr findet, nicht Theil genommen hat, darüber können vielleicht Untersuchungen an Ort und Stelle Aufschluß geben. Wasserfreie und wasserhaltige Verbindungen gleicher Art kommen übrigens nicht bloß beim Anhydrit und Gyps vor; auch in dem Galmei vom Altenberge bei Lüttich sind nach Monheim Willemit und Kieselzinkerz enthalten, nur mit dem Unterschiede, daß hier der wasserfreie Willemit vorwaltet (57,64 Proc.) und das wasserhaltige Kieselzinkerz untergeordnet vorkommt (9,19 Proc.)<sup>1)</sup> Rotheisenerz und Brauneisenerz nicht gemengt, wechseln aber in Lagen miteinander, und so mögen sich noch viele Fälle von dem Zusammenvorkommen einer Verbindung im wasserfreien und wasserhaltigen Zustande finden.

Wie am Kalkberge die Gypsmaße vorwaltet und der eingemengte Anhydrit nur untergeordnet vorhanden ist, so kommt auch das Umgekehrte vor. In dem feinkörnigen bis dichten Anhydrit von Eisleben, der weiß aber auch ganz rauchgrau, auch weiß und mit Stinkstein gemengt ist, kommen einzelne Partien von blättrigem Gyps ganz

1) Vergl. Verhandlungen des naturhistorischen Vereins der Preussischen Rheinlande von 1848, Bd. 4, S. 165.

untergeordnet vor. Es ist dieß wahrscheinlich wie beim Kalkberge eine ursprüngliche Bildung, da der Anhydrit feinkörnig ist, und gar nicht das Ansehn einer pseudomorphen Bildung hat.

## II. *Die Abendlichter an der östlichen Küste Südamerika's; von Heinrich Burkhart-Jexler in Bahia.*

**W**ährend einer beträchtlichen Reihe von Jahren meines Aufenthaltes an der Küste von Süd- und Nordbrasilien habe ich Gelegenheit gehabt, auffällige Himmelserscheinungen zu beobachten, welche dort vor und nach Sonnenuntergang zuweilen auftreten und an Schönheit und Farbenglanz die zu entsprechenden Zeiten in Mitteleuropa wahrzunehmenden übertreffen. Die an ihnen entschieden hervortretenden Eigenthümlichkeiten desselben dürften über den meteorologischen Vorgang ein gewisses Licht verbreiten, welche im Allgemeinen den farbigen Lichtern an Wolken und Dünsten zu Grunde liegen, und noch jetzt zum großen Theil in einem zweifelhaften Halbdunkel liegen. Da Zeit und Umstände nur die Beobachtung der abendlich auftretenden Erscheinungen dieser Art gestatteten, so werden sich Vergleiche, die zwischen ihnen und ihren entsprechenden Phänomenen in höhern Breiten sich einstellen, nur auf das Abendroth beziehen können. Bekanntlich besteht das, was man Abendroth nennt, darin, daß nach oder vor Sonnenuntergang bei hellem Wetter an dem West- oder Osthimmel rothe und orangefarbene auch gelbe Dämpfe und Wolken sich zeigen, deren farbige Beleuchtung zuletzt in einem weißlichen Scheine am westlichen Horizonte verlischt, worauf dann völlige Dunkelheit eintritt. Wohl bekannt ist es auch, daß die Dämmerung unter niedern

Breitegraden bei völlig reinem Himmel sehr kurze Zeit dauert, die Finsterniß dem Sonnenuntergang sehr schnell folgt: *dafs aber*, um nur Eines zu erwähnen, *wenn schon Dunkelheit herrscht, und Sterne bis zur 3. Gröfse mit unbewaffnetem Auge erkannt werden können, das Tageslicht plötzlich wieder aufleuchtet und der ganze Westhimmel ein helles Licht ausstrahlt, als ob ihn eine unsichtbare Sonne auf's Neue beleuchte*, ist meines Wissens noch nicht in dieser auffälligen Weise beobachtet worden <sup>1)</sup>.

Um an die Zeit und den Ort anzuknüpfen, wo diese Thatsache mich zum ersten Male überraschte, erwähne ich, dafs der jähe Wechsel zwischen Tag und Nacht unter gleichen Umständen so gut wie unter den Tropen auch einige Grade über die Wendekreise hinaus sich geltend macht. Der nordische Einwanderer weifs dort gar bald sich darin zu finden, wenn es ihm erst einmal begegnete, seine Rechnung auf Arbeitszeit im Freien nach Sonnenuntergang vereitelt zu sehen. Kaum dafs der lockende Ruf der Abendtaube die Nähe des Sonnenunterganges ihm verkündet, greift er behende nach seinen Werkzeugen, um bei dem letzten Lichte des Tages den Weg aus dem Walde durch das Gewirr der umgestürzten Baumreihen finden zu können und der Dunkelheit zuvorzukommen, die, wie er weifs, bald Alles überdeckt. Schon breitet die Finsterniß sich aus, da er den Fuß auf seine Schwelle setzt; doch oft, wenn er es sich schon in seiner Hütte bequem gemacht, lockt ihn der plötzlich wiedererstandene Glanz des Tages in's Freie, wo eine nie gesehene Pracht auch die wildeste Umgebung, wie die eines zerstörten Urwaldes, in zauberhafter Beleuchtung verklärt. Geblendet von Licht sucht sein Auge nach einem Ruhepunkt vergebens! Denn

1) An gewissen Abenden bemerkt man auch in Mittel-Europa nach Sonnenuntergang, wenn schon die farbigen Lichter des Abendrothes abgenommen haben, ein plötzliches Wachsen der Helligkeit; dies und die unter dem Namen des Alpenglühens bekannte Erscheinung können hier wohl als Analoga angeführt werden: Die Lichtstärke und die vorhergehende Verdunkelung aber stehen mit denen hier beobachteten in keinem Vergleiche.

nicht von *einem*, sondern von *allen* Punkten des Westhimmels richten sich Strahlen gegen ihn; wallend drängen sie sich ihm auf; das Licht und alle von ihm beleuchteten Gegenstände scheinen zu *zittern*. Nicht *ein*farbig, nicht *weiß* bricht das Licht herein: die Strahlen von *allen* Farben des Regenbogens strömen überall, wohin sich das Auge wendet, in stetem Wechsel. Von den dunkelgrünen, pergamentglänzenden Blättern der Bäume und Sträucher fließen sie herab und hüpfen von Halm zu Halm auf dem grünen Rasen. Dunkles Stahlblau, Purpur mit Gold, Saftgrün und Scharlachroth, von Violett unterbrochen, wechseln in wunderbar schneller Bewegung, und die nahen Zweige und Sträucher scheinen sich zitternd zu beleben. Nach und nach beruhigt sich die Umgebung, die jähe Bewegung des Lichtwechsels verliert sich, der Westhimmel, welcher bis dahin wie in einem Lichtnebel, einem Gemisch von Weiß, Grün und Goldschimmer geleuchtet, thut sich auf: eine purpurrothe durch alle Abstufungen von Dunkelroth in Gelb spielende Gluth bricht hervor, welche die ganze Landschaft mit Goldgelb überzieht. Diese erscheint dann in einem solchen Lichte, wie wenn man sie sonst durch ein goldgelbes Krystallglas betrachtet. Der dunkle Wald prangt in bläulichem Grün, die näher gelegenen Buschpartien strahlen in Saftgrün, die helleren Grasflächen schimmern wie in grünlichem Golde, die Stämme der Bäume und die Giebel der Häuser leuchten in röthlichem Gelb. Deutlicher Schatten wird bemerkbar; in horizontalen Projectionslinien zeichnet er sich von den Bäumen auf der nahestehenden Wand ab; die dem Westen abgewandten Abhänge der Hügel lagern sich im Dunkel. Von ihnen ausgehend verbreitet sich in einigen Minuten die Nacht aufs Neue über die Erde, denn die Flammen am Himmel erlöschen, ein mattes Gelb, und zuletzt nur noch ein weißer Schein bleibt übrig von der blendenden Herrlichkeit, um am Ende auch zu verschwinden.

In dieser Weise erblickte ich die eigenthümliche Lichterscheinung zum ersten Male im Januar des Jahres 1856

an mehreren aufeinander folgenden Abenden. Durch das tiefste Dunkelblau des Himmels war das Tagesgestirn seine Bahn gewandelt, gewaltige Hitze über die noch mit dichtem Urwald bestandene Erdoberfläche ausgießend: und obwohl die tiefe Bläue des Himmels, seine hohe vom Horizonte correct aufsteigende Kugelgestalt, auch die warme Morgen- und Abendbeleuchtung, wie sie eben nur unter den Tropen und bei den Wendekreisen gesehen wird, durch einen längeren Aufenthalt daselbst mir schon eine gewöhnliche Erscheinung geworden war, so blieb doch der Eindruck jenes Abends unauslöschlich, an welchem mich dieses Phänomen auf meiner Klärung im Urwalde, ( $26^{\circ} 18' 56''$  südl. Br. und  $30^{\circ} 50'$  westl. L. Ferro) überraschte, er war zu überwältigend, als daß mir die Frage damals nahe getreten wäre, auf welche Weise diese Erscheinung zu erklären seyn möchte. Desto mehr war mein Interesse geweckt, die sie begleitenden Umstände zu beobachten. Leider besaß ich weder die Hülfsmittel zu genauer Messung noch die Zeit, den Vorgängen eine ungetheilte Aufmerksamkeit zu schenken. Was ich damals und im Laufe des Jahres 1857 dort, und bei einem längeren Aufenthalte in Desterro ( $28^{\circ}$  südl. Br.), der Hauptstadt der Provinz St. Catharina, im Jahre 1858, sowie auf Reisen an der Küste beobachten konnte, reducirt sich auf folgende That-sachen.

Die Erscheinung, wie sie oben beschrieben wurde, tritt nur bei sehr reiner Atmosphäre auf, nach starkem Thau-falle, nach Regen und Gewittern, in deren Folge sich die Luft abkühlt und der Wasserdünste entledigt. Nie zeigte sie sich, wenn die Atmosphäre nicht vollkommen rein erschien. Die Verdunklung beginnt mit Sonnenuntergang; 14 bis 15 Minuten später bricht das wallende, zitternde Licht hervor; die Dauer desselben variirt zwischen 8 bis 9 Minuten, worauf sich die Gluth des orangefarbenen, rothen Lichtes entzündet und bis 40 Minuten lang Schatten versendet, alles mit Tageshelle beleuchtet. In den Wintermonaten Juni, Juli, August ist sowohl die Dunkelheit, welche

dem Sonnenuntergang folgt, als auch die Zeit des wallenden Lichtes von geringerer Dauer als in den Sommermonaten December bis Februar: im Ganzen aber bleibt der Vorgang sich selbst gleich und erfolgt stets in der Ordnung, in welcher ich ihn zum ersten Male beobachtet hatte. Den Eingeborenen ist die Erscheinung nichts Ungewöhnliches; der Name, welchen sie ihm gaben, *arrebol*, bezeichnet Abendroth im Allgemeinen. Uns soll derselbe Name dazu dienen, die Eigenart dieses Abendrothes kurz zu benennen, da er der Sprache des Landes entnommen ist, welches die Erscheinung schmückt.

So oft ich auch nach Erlöschen des *Arrebol* im Freien mich befunden hatte, so hatte ich doch noch nie einen besonderen Nachglanz desselben beobachtet. Mochte nun der Umstand, daß die hohen Ausläufer der *Serra geral* dort bis an die Küste vordringen und somit den westlichen Horizont für die meisten Standpunkte zum Theil verdecken, der Grund gewesen seyn, daß mir diese Beobachtung entgangen, so wurde ich doch noch bei *Desterro* im Monat Juni des Jahres 1858, in welchem sich der *Arrebol* nach längerer Unterbrechung wieder zu zeigen begann, Zeuge eines Nachspieles, wie ich es später, an anderen Orten mich aufhaltend, nie wieder so vollständig erblickt habe. Der Feuerglanz des *Arrebol* war erloschen, und Dunkelheit begann auch den Gipfel des Berges zu überziehen, auf welchem ich die Erscheinung mit meinem Begleiter beobachtet hatte; der Himmel war so rein, so durchsichtig wie noch nie: der Mond stand in  $60^{\circ}$  Elevation am östlichen Himmel; da begann, 55 Minuten nach Sonnenuntergang, die Helligkeit abermals zuzunehmen, der ganze sichtbare Himmel, östliche wie westliche Hälfte, war von einem magischen gleichmäßig verbreiteten Lichte erhellt. Die Grundfarbe desselben, ein helles Meergrün, war bald an dieser, bald an jener Stelle von Goldgelb glitzernd, bald in einem bläulichen Schatten gestellt, so daß die Fläche der Himmelshalbkugel gekräuselt und in einer fortwährenden Bewegung erschien. Nach etwa vier Minuten glättete

sie sich und glich nun einem ehernen Spiegel von grünlicher Broncefärbung auf welchen der Mond mit gelbem Lichte strahlte. Da die Beleuchtung der ihm näher gelegenen Himmelsfläche nicht intensiver war als die der ihm ferner gelegenen, ihre Intensität dagegen nach dem westlichen Horizonte anfänglich bedeutend, nach und nach aber weniger merklich stärker war als in allen nach Osten von ihm gelegenen Punkten, so war die Thatsache besonders auffällig, daß diese Helligkeit und Färbung des Himmels bis auf  $1\frac{1}{2}$  Stunde nach Sonnenuntergang mit fast gleicher Intensität andauerte, obwohl sie offenbar nicht vom Mondlicht, sondern von der Sonne ausging <sup>1)</sup>.

Da ich jene Breiten noch im Jahre 1858 verließ, und meinen Wohnort in Bahia ( $12^{\circ} 30'$  südl. Br.) nahm, so hoffte ich Gelegenheit zu finden auch unter diesem Himmelsstrich dieselben oder ähnliche Phänomene beobachten zu können. Doch vergingen mehr als drei Jahre, bevor sich irgend welche Spur davon hätte wahrnehmen lassen. Es waren die Jahre 1858 bis 1860; sie stehen aus ihrer fast gänzlichen Regenlosigkeit und des daraus entsprungenen Elends in den Annalen der Provinz unter den verderblichen verzeichnet. Feuerroth ging die Sonne auf, ihre versengende Gluth war von keiner Regenwolke gemildert; leichtes gegen 11 Uhr Vormittags hie und da aufgestiegenes Gewölk verschwand nach wenig Stunden, ein Meer von orangefarbenem glanzlosen Lichte, ohne Roth, bedeckte noch nach Sonnenuntergang 60 bis 70 Minuten lang den

- 1) Da gleichwohl ähnliche Erscheinungen nur bei Anwesenheit des Mondes beobachtet werden, so erscheint sein Einfluß doch außer Zweifel, wie ich dann von da ab bald mit Sicherheit aus der eigenthümlichen Bläue und Durchsichtigkeit des Himmelblau am Tage auf die Anwesenheit des Mondeseinflusses schließen lernte und auf besonders schöne Abendlichter zu rechnen im Stande war, was zur Zeit, wenn der neue Mond bei Sonnenuntergang am westlichen Himmel stehend noch nicht oder kaum sichtbar war, mir besonders auffällig erscheint. Glanz und Dauer der farbigen und weißen Lichter ist bei anwesendem Monde stets größer als bei seiner Abwesenheit, es sey denn, daß er nur einige Grade unter dem östlichen Horizonte stehe.



Westhimmel; von jäh eintretender Dunkelheit war keine Rede. Der Schauplatz war somit ganz geändert, und während auf meiner Reise dahin auch in den Provinzen Paraná, São Paulo, Rio de Janeiro ich einen gleichförmigen mit dem des Klimas von St. Catharina auch im Abendroth übereinstimmenden Charakter gefunden hatte, so traten die Differenzen des in Bahia und Umgegend herrschenden klimatischen Zustandes in jenen Jahren völliger Trockniss um so entschiedener hervor. Durch einen mehr als zehnjährigen Aufenthalt überzeugte ich mich, daß wesentliche Verschiedenheiten auch dann hier obwalten, wenn die sonst regelmässige Jahreswitterung, wie sie jedem Eingeborenen bekannt ist, ihre ordnungsmässigen Termine der Regen und Gewitter einhält. Dunkel, fast schwarzblau hebt sich in den südlichen Provinzen der Himmel von der Erdoberfläche und dem Meere ab, während er in Bahia und Umgegend auch an den heitersten Tagen zu allen Stunden, von einem Dunstnebel wie mit einem feinen weissen Schleier überzogen scheint. Dieser feine Nebel möchte bei oberflächlicher Betrachtung mit dem Höhenrauche in Deutschland oder der Comina in Spanien verwechselt werden, unterscheidet sich aber wesentlich von ihnen; denn während diese die Durchsichtigkeit der Luft, und die Deutlichkeit der Gipfel ferner Berge, welche sich wenig über dem Horizonte erheben, beeinträchtigen, beraubt jener Dunstschleier die Atmosphäre so wenig ihrer Durchsichtigkeit, daß die Umrisse der fernsten und niedrigsten Erhebungen am Horizonte sich durchaus deutlich abzeichnen. So kann man z. B. trotz dieses Nebels von einer Höhe bei Bahia den Morro de São Paulo mit bloßem Auge erkennen, obwohl er 26 Seemeilen entfernt, sich mehr als 70' über den Meerespiegel erhebt. Der Schweif des donatischen Kometen dehnte sich in den Monaten October und November 1858 zu einer Zeit, wo der Nebel schon seit einem Jahre durch Regen nicht mehr niedergeschlagen worden war, über fast die ganze Himmelshalbkugel aus, und sein eigenthümliches Licht zeichnete sich,

sobald die Dämmerung dunkelte, auf dem strahlenden Sternenhimmel so scharf ab, daß auch in seinem vom Kerne entferntesten Theilen die Begränzung deutlich wahrzunehmen blieb. Obwohl man selbst von diesem feinen Nebel umgeben ist, wird man desselben doch nur gewahr, wenn man auf weite Entfernung nach einem dunkeln Gegenstand, wie z. B. dem Himmel, einem Wald oder waldigen Hügel blickt; zu dem muß die Richtung des Blickes einen möglichst großen Winkel mit der Linie vom Auge nach der Sonne bilden, indem je directer und voller das Sonnenlicht auf das Auge wirkt, desto weniger der geringe Lichttheil bemerklich werden kann, welchen die Dünste auffangen und dadurch sichtbar werden. Auf welche Weise sich der Nebel über das Land verbreite, kann man gegen Mittag sehr gut beobachten, sobald der Seewind beginnt. Dann sieht man, wie auf dem der Sonne abgewandten Theile der östlichen Himmelskugel, von der kühlen Luftströmung getragen, die weißen wallenden Schwaden vom Meere nach dem Lande sich bewegen, mit den erhitzten Luftschichten daselbst sich vermischen und je höher sie steigen, desto durchsichtiger werden. Vermöge der Durchsichtigkeit ihrer Substanz (des Wassers) und wegen ihrer äußerst feinen Vertheilung gestatten sie den Lichtstrahlen zum großen Theil freien Durchgang, sind also durchsichtig; vermöge ihrer Sonderung in feine Dunstbläschen reflectiren sie, ein jedes für sich, nach allen Richtungen und fangen somit einen sehr kleinen Theil der sie treffenden Lichtstrahlen auf, durch welchen sie selbst sichtbar werden. Vermöge dieses Lichtantheiles, den sie reflectiren, nicht aber durch das durch sie hindurchgehende Licht, werden sie unter denselben Umständen auch leuchtend, wie jeder andere Körper leuchtet, wenn er stärkeres Licht ausstrahlt als seine Umgebung. Die wallende Bewegung der Dünste bei ihrem Aufsteigen ist ihrem geringen specifischen Gewichte und ihrer geringen Wärmeleitfähigkeit bei den obwaltenden Temperaturdifferenzen, welche sich nur nach und nach ausgleichen, beizumessen, sie läßt

sich an heiteren Tagen meist bis 2 Uhr Nachmittags und darüber sehr regelmässig beobachten. Unwillkürlich erinnert ihr Anblick an das Wallen und Zittern des Lichtes im *Arrebol*, wie er im Süden sich zeigt, und wirklich könnte letzteres füglich nicht einen besseren Grund voraussetzen, nur daß die Wellen sehr viel kürzer seyn müßten, um die wallende in eine zitternde Bewegung überzuführen. Sollten aber die Wellen, je höher die Dämpfe steigen, nicht immer mehr sich verkörpern, und die in höheren Luftschichten sich condensirenden Dämpfe unter ähnlichen Umständen nicht noch kleinere Undulationen des Lichtes hervorbringen? Das Funkeln der Sterne bietet für Bejahung dieser Frage einen guten Grund.

Das fast ununterbrochene Vorhandenseyn eines sichtbaren und doch so durchsichtigen Mediums wird durch verschiedene örtliche Verhältnisse erzeugt. Bahia liegt 12° 30' südl. Br. und 20° 42' westl. L. Ferro, auf einer schmalen Landzunge, welche zwischen dem Ocean und der Allerheiligen Bai sich in südöstlicher Richtung erstreckt. Demnach tritt zu seinem fast *insularen* Klima der Umstand hinzu, daß es sich in dem Gürtel der Kalmen befindet, wo Nordost- und Südostpassat sich zu einer von Ost nach West gerichteten Strömung combiniren. Wie bekannt wird deren horizontale Bewegung durch das mächtige Aufsteigen der Luft von der erhitzten Erde neutralisirt, indem ihre mächtig ergreifende verticale Bewegung sich der Resultante der Passate mittheilt. Diesem Umstande ist es hauptsächlich beizumessen, daß der klimatische Zustand Bahias sich fast immer gleich bleibt. Von den sonst in den Kalmen häufig beobachteten *gewaltsamen* Störungen kennt man hier *keine*; die Südwinde, welche selten genug auftreten, bringen eine geringe Wärmeabnahme und Regen mit sich. So ist die Temperatur in und bei Bahia nur sehr wenig Schwankungen unterworfen. Des Nachts fällt das Thermometer auf 20°, selten auf 19°, nie unter 18° R, und erhebt sich bis zur Mittagszeit bis 2 Uhr Nachm. auf 24° bis 25° R.; höhere Temperaturen sind grofse Selten-

heiten. Die mittlere Jahrestemperatur stellt sich auf  $21^{\circ}$  R., nur  $3^{\circ}$  höher als die größte Kälte. Die geringe hier mögliche Abkühlung der Luft begünstigt ihre Sättigung mit Wassergas und verlangsamt die Condensation des überschüssigen Dunstes. Verlangsamung dieses Processes sowie hohe Temperatur sind beides Umstände, welche die Bildung des durchsichtigen und doch sichtbaren Dunstnebels befördern. Niederschläge, Thau und Nachtregen, durch die nächtliche Abkühlung hervorgebracht, befähigen die Luft, bei ihrem Aufsteigen täglich neue Wasserdünste in Gasform aufzunehmen und in ihrem verticalen Aufsteigen mit empor zu tragen. Vollkommene Reinigung der Atmosphäre von condensirten Dämpfen wird auf Stunden nur von Gewittern hergestellt.

Die Südwinde, Ausläufer des Pampeiro, wie die von Patagonien kommende kalte Luftströmung in den Laplatastaaten genannt wird, unterbrechen den Charakter des hiesigen Dunstkreises gänzlich. Ihre Ankunft kündigt sich 12 bis 18 Stunden voraus durch Federwolken an, die am südlichen Horizonte sich ansammeln und ihrer Längsrichtung nach senkrecht auf die Windrichtung gestellt erscheinen, anschwellen und als fette Wolkenschichten, mit Annäherung des Windes den Himmel überziehen und die Erde mit Regen überschütten. Der Wind selbst ist in Bahia nicht sehr heftig; er hält einige Tage an, das Thermometer sinkt des Nachts um 1 bis 2 Grade, die Atmosphäre bleibt längere Zeit auch nach Aenderung der Windrichtung trübe, und oft noch Wochen nachher unterscheidet sich der Anblick der Landschaft wenig von dem einer mitteleuropäischen im Sommer. Nur allmählig gewinnt der Himmel seine spezifische Durchsichtigkeit wieder und wölbt sich zu jener vollkommenen Halbkugel, die er sonst bei heiterem Wetter unter den Tropen zeigt.

Den hier angedeuteten Eigenthümlichkeiten der meteorologischen Verhältnisse in Bahia ist es beizumessen, daß hier Lichterscheinungen in der größten Mannichfaltigkeit auftreten, von welchen die in der Provinz St. Catharina

beobachteten nur speciell und weniger ausgebildete Fälle darbieten, und von denen anderwärts her keine Kunde bis jetzt vorliegt. Nachdem nämlich die Jahre der Trockniß vorübergegangen, ohne daß sich irgend welche Andeutung des *Arrebol* hätte wahrnehmen lassen, auch das Jahr 1861, welches die ersten Regen brachte, vergeblich auf diese Erscheinungen ausschauen liefs, begannen mit dem Jahre 1862 Reihenfolgen von so überraschenden Phänomenen, daß es fast schwer wurde dieselben nach ihren Eigenthümlichkeiten zu ordnen. Da sie auch in dem darauf folgenden Jahre sich wiederholten, so gelang es dem sich anbietenden Eintheilungsgrund in dem Zustande der Atmosphäre festzustellen, und hiernach lassen sie sich in vier Hauptgruppen vorführen. *Die Erscheinungen der ersten Gruppe treten auf bei vollkommen reinem Dunkelblau des Himmels und gänzlicher Abwesenheit des Dunstnebels die der zweiten bei einem wolkenleeren Himmel mit feinstem; fast vollkommen durchsichtigen Dunstnebel; die der dritten bei wolkenleerem Himmel mit Dunstschleier, welcher ohne seine Durchsichtigkeit zu verlieren, durch eine während des Vormittags eintretende Abkühlung eine mehr als gewöhnliche Dichtigkeit zeigt; die der vierten in der Zeit der Klärung der Atmosphäre und bei noch nicht völlig wieder hergestelltem tropischen Charakter des Himmelsgewölbes nach dem Wehen des Südwindes.* An diese vier Gruppen reiht sich noch eine fünfte, welche die zu Gruppe 1, 2 und 4 gehörigen Nachspiele enthält, Erscheinungen, welche auch an andern Abenden bei heiterer Witterung sichtbar werden, und deshalb eine gemeinschaftliche Behandlung beanspruchen.

Erscheinungen der 1. Gruppe werden nur dann wahrgenommen, wenn Gewitter kurze Zeit vor Sonnenuntergang, frühestens  $3\frac{1}{2}$  Uhr Nachmittags, sich entladen haben, denn nur durch solche wird die vollkommene Abwesenheit condensirter Dämpfe zur Zeit des Sonnenunterganges hergestellt, ohne daß sich solche bis dahin wieder neu bilden könnten. Die Anwesenheit von sich entladenden Gewitter-

wolken, die mit ihrem eigenen Winde in den niedern Regionen dahin jagen, hindert das Zustandekommen der Erscheinung in ihrer Farbenentwicklung nicht. Durch die Zwischenräume, welche sie zwischen sich lassen, kann man das Phänomen auf dem dunkelblauen Himmel erblicken, und schnell genug ist der Himmel von den flüchtigen Seglern geräumt, um eine vollständige Uebersicht zu gestatten, wenn das Gewitter seine Entladung nicht allzu nah an die Zeit des Sonnenunterganges verschiebt. Aehnlich dem *Arrebol*, wie ich ihn unter dem 26. bis 28. Grade südl. Br. beobachtet, geht auch hier die Erscheinung vor sich. Die Sonne geht unter, Dunkelheit breitet sich schnell über Himmel und Erde aus. Die Sterne bis zur 3. Gröfse werden sichtbar. Da bricht das Tageslicht wieder hervor, nicht aber, wie ich es dort gesehen, in wallender Bewegung und stetem Wechsel aller Farben des Regenbogens von dem in Weiß, Grün und Goldschimmer leuchtenden Westhimmel ausströmend. Die Farben des Regenbogens treten im Gegentheil ruhig und zum Theil in scharfer Sonderung, zum Theil in Uebergängen nebeneinander am Himmelsgewölbe selbst auf. Ein dunkles prächtiges Violett erscheint nahe bei dem Zenit (*Z*) Fig. 1 Taf. II. in Form eines Halbkreises *ivi* und dehnt sich nach und nach über den obern Theil des Westhimmels *i'v'i'*, *i''v''i''* aus, während ein hell leuchtendes Licht, ein Gemisch von Weiß, Grün, Gelb und Roth am Osthimmel in der Höhe von ungefähr 40 bis 55° plötzlich Tageshelle verbreitet. In ihm lassen sich, je länger je mehr, das weiße und rothe Licht am deutlichsten unterscheiden. Im Anfang ist es verschwommen, und seine Ausdehnung von Nord nach West schwer zu bestimmen, jedoch läßt sich feststellen, daß es symmetrisch um den größten Kreis *OW* sich verhält, der durch das Auge des Beobachters, das Zenit (*Z*) und die Sonne gelegt ist. Im Augenblicke seines Aufleuchtens erhellt es die Fläche zwischen den Kreisbögen *w* und *t*, zieht sich dann mehr zusammen auf *w't*, *w''t*, indem Weiß und die übrigen Farben verschwinden und nur Purporroth zurückbleibt, wel-

ches dann den Raum zwischen  $tt'$  ausfüllt und nach und nach weiter mit ziemlich scharfer Begrenzung nach oben rückt <sup>1)</sup>).

Das violette Licht dagegen, welches im selben Augenblick oder einige Secunden nach der im Osthimmel plötzlich aufleuchtenden Helligkeit nahe bei dem Zenit erscheint, ist ebenso scharf begrenzt als seine Farbe rein und gesättigt. Je dunkler der Himmel war, desto intensiver ist sein dunkles Veilchenblau und um so übereinstimmender mit der dunkelsten Stufe des Violett im Spectrum. Im selben Maasse ist auch sein Umriss scharf bestimmt, und der Raum, welchen es um das Zenit ( $Z$ ) einnimmt, ist, so lange am Westhimmel keine andere Farben auftreten, durch die Bögen  $ivi$ , oder  $i'v'i'$ , oder  $i''v''i''$  und den größten Kreis  $NS$  eingeschlossen, denn die Größe des Raumes, welchen Violett sogleich bei seinem ersten Auftreten einnimmt, ist ziemlich verschieden und nicht allein abhängig von der Zeit, welche nach Sonnenuntergang bis dahin verflossen war. Dagegen liefs sich stets feststellen, dafs es sich im Verlauf des Phänomens immer mehr nach Westen ausdehnte, und vom Zenit entfernt; fünf bis sechs Minuten spätestens nach dem Wiederaufleuchten des Tageslichtes traten auch die übrigen Farben des Spectrums am westlichen Himmel auf, und zwar unmittelbar unter Violett ein Gürtel Hellblau ( $ibli''v''i''$ ), darunter Grün ( $nrn$   $lbi$ ), Gelb ( $egenrn$ ), Orange ( $NWSege$ ), welches letzteres sich bis an den Horizont ausdehnte. Diese Farbengürtel erstrecken sich symmetrisch  $90^\circ$  nach Nord und Süd zu beiden Seiten des größten Kreises  $OW$ , verkürzen sich aber nach und nach; indem die Punkte  $i, i', i'', l, n, e$  sich von dem größten Kreise  $NS$  westlich entfernen. Zu gleicher Zeit zieht sich Violett von dem Zenit abwärts

- 1) Die Begrenzung des Purpurrothes wird an sehr heiteren Sommer- und Herbsttagen in Mitteleuropa fast an Schärfe erreicht von dem Gürtel fleischrother Beleuchtung über dem Horizonte des Osthimmels, welcher meist für einen Widerschein des Abendrothes genommen wird.



nach  $z$  in westlicher Richtung, und die Umrisse des beleuchteten Theiles des Westhimmels sind zwei symmetrisch zu beiden Seiten des größten Kreises  $WZ$  gelegene Curven *Senlis*, welche besonders da, wo sie das Violett begränzen (in  $iz$ ), sich besonders scharf gegen den dunkelblauen Himmel abheben. Häufig, besonders wenn das Phänomen sich langsam entwickelt, bilden beide Curven in  $z$  eine Spitze, so spitz, wie sie bei einem Kegelschnitte nicht vorkommen kann, während sie für gewöhnlich dem Scheitel einer Ellipse nicht unähnlich ist. Die Umrisse der beleuchteten Hohlfläche des Westhimmels verlieren mit der sogleich zu erwähnenden Veränderung des Lichtes, welche alsbald darin vor sich geht, ihre Schärfe und enge Begränzung; sie dehnen sich, sobald namentlich das Violett verschwunden ist, nach oben hin divergirend aus, wobei oft helle und dunkle Strahlenlinien von dem Orte der Sonne ausgehend einen Bogen von ungefähr  $60^\circ$  am Horizonte zur Basis einnehmen. Im letzten Stadium der Farbenentwicklung breitet sich das Farbenlicht am Horizonte wiederum mehr aus, während es an Höhe auf 15 und weniger Grade abnimmt.

Was nun das Roth betrifft, welches am Osthimmel sich aus dem Farbengemisch in derselben Zeit absonderte, als dieses gesondert am Westhimmel die oben bezeichnete Stellung einnahm, so bildet dies, wie wir schon andeuteten, einen Gürtel, und zwar von immer reinerem Purpurlichte, je weiter es nach dem Zenit hinaufsteigt; auf diesem Wege bleibt es symmetrisch, um die Linie  $OW$  nach Nord und Süd gelagert, und indem es das Zenit übersteigt, deckt es zum Theil das Violett, welches in viel höhern Regionen sich, wie der Augenschein lehrt, auf dem dunkelblauen Aether von Anfang an verbreitete. Durch die theilweise Deckung des Violett entstehen Farbmischungen von Purpur und Violett, und da zu gleicher Zeit noch eine wesentliche Umänderung am Westhimmel vor sich geht, nämlich die Bildung von glänzend weißem Lichte, oft ehe das Violett verschwindet, so sieht man vom

Zenit westwärts die prachtvollsten Farbenspiele vom tiefen Purpur und Violett durch Rosenroth bis zu dem zartesten Anflug von röthlichem Schein auf weißen Camilien. Die Hohlfläche, auf welcher sich das Roth ausbreitet, besteht aus durchsichtigem Dunstnebel und kann man durch sie hindurch bald hier bald dort den höhern Hintergrund an dem dunkeln violetten Licht, oder an dem hellen Weiß erkennen. Sie selbst erscheint dabei gekräuselt, als ob Haufenwölkchen und Federwölkchen sich gebildet hätten. Diese Gestalten aber verschwinden alsbald im Dunkelblau des Himmels da, wo sich die Beleuchtung zurückzieht, und beweisen hiermit ihre Identität mit dem oben näher charakterisirten Dunstnebel.

Die wesentlichste Umänderung der Scene auf dem westlichen Himmel beginnt aber mit der Bildung eines glänzend weißen Hintergrundes, welcher von dem Gürtel des Hellblau auszugehen scheint. Dieser Gürtel wenigstens, der von Anfang an mehr Weiß als Blau enthält, nimmt immer mehr einen Silberglanz an, auch Grün geht in Weiß über und Violett verschwindet ganz. Seine größte Ausdehnung gewinnt dieser weiße Hintergrund, wenn auch Roth vom Westhimmel verschwindet, dabei nimmt aber die Helligkeit schnell zu, Orange und Gelb leuchten mit Tageshelle, meist tritt das Maximum ihrer Leuchtkraft 45 Minuten nach Sonnenuntergang ein; wenn dann das Purpurroth zu unterst am Horizonte hervorstrahlt, ist das wiedererstandene Licht im Abnehmen begriffen und die Farbengluth erlischt.

Fassen wir die Erscheinungen dieser Gruppe noch einmal in ihren Hauptmomenten der Zeit nach übersichtlich zusammen, so beginnt nach 15 bis 18 Minuten wachsender Dunkelung der Atmosphäre die Erscheinung des Violett im Zenit und des hellen Farbungemisches am Osthimmel; 22 bis 23 Minuten nach Sonnenuntergang die der übrigen am westlichen Himmel sichtbar werdenden Farbungürtel; 23 bis 25 Minuten die des Purpurrothes am östlichen Himmel, 28 bis 30 Minuten sein Ueberschreiten

des Zenites; 32 bis 36 Minuten die Ausbildung des silberglänzenden Hintergrundes an Stelle des Hellblau und Grün sowie des Violett; 43 bis 45 Minuten das Maximum der Leuchtkraft des beleuchteten Westhimmels; 60 bis 78 Minuten Verlöschen der farbigen Gürtel. Deutlicher Schatten wird wahrgenommen von 36 bis 60 Minuten. Ein gelblicher Schein unmittelbar über dem Horizonte dauert oft bis 90 Minuten, ein weißlicher Schein bis 2 Stunden und mehr nach Sonnenuntergang.

*Die bei Anwesenheit des durchsichtigen Dunstnebels auftretenden Erscheinungen bilden die zweite Gruppe.* Obwohl der Nebel sehr fein ist, lassen sich in demselben doch Grade der Dichtigkeit unterscheiden. Der Beobachtung liefert die grössere oder geringere Beimischung von Weiss in dem Blau des Himmels besonders in der Nähe des Horizontes einigen Anhalt, um über die relative Dichtigkeit desselben zu urtheilen. Die Erscheinungen selbst variiren mit den Graden der Dichtigkeit und treten mit der grössten Mannichfaltigkeit auf. *Darin* stimmen die unter diesen Umständen sichtbaren Abendlichter alle überein, dafs sich ein Spectrum bildet und ein leuchtender weifser Hintergrund nach ihm auf dem westlichen Himmel, wobei Roth auch wiederum auf dem Osthimmel erscheint. Die Verdunkelung, welche nach Sonnenuntergang und dem Erscheinen des Spectrums vorausgeht, dauert um so länger je dünner, und um so kürzer je dichter der Dunstnebel ist. An Abenden, wo gar keine oder eine nur sehr kurze Verdunkelung eintritt, beginnt das Spectrum mit einem kreisrunden oder deutlich elliptischen Flächenstück östlich und westlich um das Zenit mit violetterm Lichte beleuchtet. Das Violett ist nicht so tief dunkel als in der ersten Gruppe; unmittelbar nach Sonnenuntergang erscheint es mehr oder weniger blaß, nimmt aber an Intensität zu, je mehr es auf dem westlichen Quadranten Stellung genommen hat, und ähnlich dem Violett in der ersten Gruppe von deutlichen Umrissen begrenzt wird. Dann erscheint auch das bläuliche Licht unmittelbar unter ihm in Gürtelform, sowie die übrigen

Farben in der oben angegebenen Stellung. Das Roth am Osthimmel erscheint ebenfalls blasser als in der ersten Gruppe, wo es sich aus dem Farbengemische sondert; von letzterem ist bei diesem Phänomen keine Spur. Die Stellung, in welcher das Roth hier zuerst auftritt, ist viel tiefer am Osthimmel als bei der ersten Gruppe, was mit der Zeit nach dem Sonnenuntergang ungefähr, aber nicht vollständig im Einklang zu bringen ist. An manchen Abenden entwickelt sich das Grün gar prächtig, durch tiefe Sättigung überraschend, so lange das über ihm stehende Hellblau nicht in weißen Lichtglanz übergegangen ist, und Violett noch prangend am Westhimmel steht.

Eine besonders auffällige Erscheinung aber bei ziemlicher Menge des Dunstnebels in der Nähe der Erdoberfläche, gehört hierher. Sie erschien regelmässig jeden Abend vom 18. bis 26. September 1862, was um des Umstandes willen hervorgehoben zu werden verdient, als der September des Jahres 1863 ähnliche, jedoch in einem Punkte wesentlich verschiedene Phänomene lieferte, die unter der dritten Gruppe aufgeführt werden. Nachtregen hatten die Dämpfe niedergeschlagen, einige Cirri waren am Himmel hie und da verstreut, auf dem westlichen Horizonte lagerte bis 3° Höhe eine Schicht Dämpfe, durch welche die Sonne bei ihrem Untergange rothes Licht verbreitete. Sobald sie verschwunden, zeigte sich um den Mittelpunkt in 45° scheinbarer Höhe eine kreisrunde Helligkeit von 15° Bogenradius, welche fortwährend an Licht zunahm, und in ihrem Mittelpunkte einen Glanz entwickelte, als ob dort die Sonnenstrahlen durchbrechen wollten. Nach ungefähr 10 Minuten nahm die Fläche radial an Ausdehnung zu und färbte sich an ihren Rändern; dabei wurde ein Wallen und Wogen von Dämpfen bemerkt, welche sich nach oben zu bewegen schienen. Der nach dem Zenit zu gelegene Theil der Scheibe färbte sich dunkelviolett, die Mitte weißbläulich, der dem Horizonte nahe gelegene tief grün, nach oben dunkel, nach unten durch Saftgrün in Gelb übergehend. Orange trat,

so lange die Scheibe ihre runde Gestalt behielt, nicht in ihr auf, wohl aber wurde es sichtbar auf den über dem Horizonte gelagerten Dämpfen; Roth durchstrahlte, am Osthimmel aufsteigend, die untern noch deutlich wogenden Nebel, welche bald dem Violett einen prächtigen rothen Schein und dem bläulichen Weiß eine zarte Rosafärbung gaben. Nach und nach tritt in den Dämpfen Ruhe ein und der von den Dämpfen freigelassene Himmel leuchtet mit einem magischen bläulichen Weiß. Der Kreis, in welchem die Farben Violett, Hellblau, Grün und Gelb eingeschlossen waren, nimmt mehr und mehr eine elliptische Form (die kleine Axe im größten Kreise *ZW*), die unteren Farben gehen dann in horizontale Streifen über, während Violett nach oben durch einen Bogen begrenzt wird, der seine convexe Seite dem Zenit zukehrt. Durch die dann erfolgende Versetzung des Roth an den westlichen Horizont und Vermischung seines Lichtes mit dem der über ihm liegenden Orange und Gelb erzeugen sich die auch bei der ersten Gruppe angedeuteten divergenten Strahlen, welche auf einer Basis von nahezu  $60^\circ$  am Horizonte hervorbrechen, und von dem Orte der Sonne unter dem Horizonte ausgehen, sehr ähnlich den Strahlen des Nordlichtes, welche mit fein zertheilten hellen und dunkeln Linien schraffirt erscheinen. Der weitere Verlauf dieser Phänomene ist denen der ersten Gruppe von da ab ganz ähnlich.

*Die Erscheinungen der dritten Gruppe* wurden beobachtet (September 1863) bei einer großen Anhäufung durchsichtiger Nebel nicht nur in der Nähe der Erdoberfläche, sondern auch in der Höhe des Dunstkreises. Weiße Dämpfe sieht man des Nachmittags vom östlichen Horizonte aufwärts bis in die Nähe des Sonnenstandes sich ausdehnen; zwischen ihnen und der Sonne bleibt ein Ring von blauem Himmel sichtbar, in der Breite von 4 bis 5 Grad. (Dieser Umstand ist für die Durchsichtigkeit der Dämpfe ein wichtiges Criterium). Die Anhäufung von Dämpfen in den höhern Regionen des Dunstkreises vor Sonnen-

untergang erklärt sich aus einer dort im Laufe des Vormittags eingetretenen Abkühlung, da bei klarem Himmel plötzlich Niederschläge *ohne* vorhergehende oder nachfolgende *Wolkenbildung*, wie sie hier nicht selten vorkommen, stattgefunden hatten. Gegen 4 Uhr Nachmittags breitet sich innerhalb Zenit und  $45^\circ$  Elevation ein weißer heller Schein in Kreisgestalt über die Nebel am westlichen Himmel aus. Die Helligkeit in demselben nimmt zu, die Peripherie läßt sich nach und nach deutlich erkennen, und statt von dem Mittelpunkte, dessen Elevation noch  $60^\circ$  ungefähr ist, in  $15^\circ$  radialer Entfernung ab. Langsam rückt der Mittelpunkt und die ganze Helligkeit abwärts, und mit fortdauernd sich steigender Helligkeit vermindert sich die radiale Entfernung der Peripherie. Ist er in ungefähr  $46^\circ$  Elevation angekommen, so läßt sich eine gleichmäßig beleuchtete kleinere Scheibe von  $8^\circ$  Bogendurchmesser innerhalb des concentrisch beleuchteten Nebels unterscheiden. Bei  $48^\circ$  Elevation des Mittelpunktes, und  $6^\circ$  Elevation der Sonne hat die innere Lichtscheibe auf  $3^\circ$  Durchmesser sich verkleinert, und es scheint, als ob hier die wahre Sonne durch die Nebel dringen müsse, da die dem Untergange nahe stehende Sonne immer mehr an Glanz verliert. Bald wird diese von dem in der Nähe der Erdoberfläche stärker angehäuften Nebeln dem Auge entzogen, und um so heller strahlt die Nebensonne, obwohl noch immer von Nebelglanz umflort. Noch einmal wird die wahre Sonne unmittelbar vor ihrem Untergange sichtbar und sinkt als rother Feuerball unter den Horizont. In demselben Augenblick strahlt mit blendendem, *nicht mehr umflorten* Lichte, ( $36^\circ$  Elevation) die Nebensonne am Himmel. Ihr Durchmesser ist dem der wahren vollkommen gleich, ihr Licht dem Auge unerträglich, der deutliche Schatten auf 2 Fuß gemessen, die Nebel weichen vor ihr zurück, wie sie es vor der wahren Sonne gethan, und lassen zwischen sich und ihr den oben beschriebenen Ring blauen Himmels erblicken. Ohne ein sehr merkliches Absteigen der Nebensonne nach dem Horizonte hin wahrnehmen zu können,

beobachtete ich sie in 35° Elevation nach 36 Minuten mit vollem Lichte nach Sonnenuntergang. Ohne Farbenentwicklung zerflossen die Umrissse der zuletzt an Leuchtkraft abnehmenden Scheibe, und sie endet in einem weissen Scheine von unbestimmter Ausdehnung am westlichen Himmel. Somit liefert diese Gruppe Beispiele einer natürlichen Verlängerung des Tages.

Die unter der *vierten Gruppe* aufzustellenden Erscheinungen stellen sich in denjenigen Zeiträumen ein, in welchen sich die Atmosphäre nach dem Wehen des kältesten Südwindes wieder aufklärt. Die grauen Regenwolken haben einem helleren Dunstkreis den Platz geräumt. Des Tages erscheint der Himmel hellblau *ohne* den gewohnten durchsichtigen Nebel, des Abends gleichmässig von einem mattweissen Ueberzug gedeckt, welcher vor und nach Sonnenuntergang einen leichten Anflug von röhlichem Weiss nicht verlägnet, aber stark leuchtende Phänomene hervorzubringen nicht vermag. Kleine Haufenwolken finden sich in der Nähe des Horizontes, langgezogene Federwolken bei dem Zenit. Die ganze Scenerie hat viel Aehnliches mit einer europäischen heitern Junilandschaft. Auch am Abend ist nichts von Dunstnebel zu spüren, und der Raum zwischen der Erdoberfläche und dem weissen glatten Ueberzug des Himmels vollkommen frei, aber auch viel niedriger als bei den Phänomenen der ersten drei Gruppen. Ein an tropischen Lichtglanz gewöhntes Auge läßt die Beleuchtung matt finden, und noch ehe die Sonne den Horizont erreicht hat, an den Anfang der Dämmerung glauben. Da ereignet es sich nicht selten, daß vor und nach dem Sonnenuntergange *auf dem Osthimmel ein treues Bild des Westhimmels sich abspiegelt*. Wolkenstreifen, welche sich radial zur untergehenden Sonne stellen, erscheinen in Spiegelbildlage am Osthimmel ausgerichtet, *zuweilen die Sonnenscheibe selber* in dem ihrem Rande in Westen gegenüberliegenden Orte. Auffällig sind dunkle Strahlen (leicht von Wolkenstreifen durch ihre deutliche Längschraffirung zu unterscheiden), die fächer-



förmig von dem Orte der Sonne unter dem Horizonte ausgehend, sich mit zunehmender Breite und abnehmender Intensität bis zu dem Zenite erstrecken und jenseits sich fortsetzen in ihrer Spiegelung auf dem Osthimmel.

Die *fünfte* Art sehr übereinstimmender Vorgänge enthält die letzten Spuren, welche die Abendlichter nach Verlöschung ihres Glanzes am Nachthimmel zurücklassen. Sie beschränken sich nicht auf diejenigen Abende, welche durch auffällige Phänomene ausgezeichnet sind; selten geht ein Abend specifisch tropischer Heiterkeit in Bahia vorüber, an dem nicht über einem Streifen weißen Lichtes am westlichen Horizonte sich ein pyramidales weißes Licht erhebe. Seine scheinbare Höhe beträgt 22 bis 23°, sein Umriss ist meist verschwindend, selten scharf bezeichnet. Bei scharfer Begränzung gleicht die Lichtpyramide der Fläche *sss* (Fig. 2, Taf. II), nur daß die Gipfel in *z* spitzer und die Punkte *s* näher an *W* gerückt sind. Die Lichtintensität nimmt dann nach dem Rande hin strahlend zu und verliert sich nachher in matten Ausstrahlungen. Die horizontale Ausdehnung des weißen waagrechten Streifens ist bei Sonnenuntergang 100 bis 120°, nimmt aber mit fortschreitender Dunkelheit schnell auf 60° und nach und nach auf weniger Grade ab. Die auf ihm sich erhebende Pyramide hat an der Basis nur 30 und weniger Grade, ihre Höhe bleibt während ihrer Sichtbarkeit ohne wahrnehmbare *Verminderung*. *Die Lichtstärke der Pyramide, sowie des hellen Streifens ist am größten, wenn der Mond sie bescheint.* Diese Steigerung ist so auffällig, daß aus der zum Glanz sich erhebenden Helligkeit des Phänomens auf die Beimischung des Mondlichtes sicher geschlossen werden kann, auch wenn derselbe unsichtbar und noch einige Zeit (bis 30 Minuten) braucht, um über den östlichen Horizont aufzusteigen. An Abenden, in denen ohne wahrnehmbare Luftströmungen die Condensirung der Dämpfe an der Erdoberfläche sich vollzieht, namentlich ehe der Landwind beginnt, ereignet es sich häufig, daß die Lichtpyramide schnell zu einer riesigen Höhe aufsteigt, das Zenit fast erreicht

und zugleich dem Beobachter sich nähert. Die Breite nimmt dabei sehr wenig zu, die Umrisse aber werden deutlich und ähneln einer halben sehr gestreckten Ellipse, deren kleine Axe in dem Horizonte liegt, deren große Axe mit dem größten Kreise *WZ* (Fig. 2) zusammenzufallen schien. Flimmerndes und zitterndes Licht wird in vielen Punkten innerhalb des Lichtgebildes beobachtet, und bei großer anscheinender Nähe desselben erkennt man deutlich in den von dem Lichte beschienenen, in Condensation begriffenen Dämpfen die Ursache davon, da man ihre Bewegung deutlich wahrnehmen kann. Sie sind es, welche durch das weiße Licht vom Horizonte aus beleuchtet, die scheinbare Erhebung der Lichtpyramide erzeugen nach dem einfachen Gesetze der Perspective, daß die näheren Gegenstände, weil unter einem größeren Gesichtswinkel, selbst größer erscheinen. Nach und nach verliert sich das Flimmern und Zittern des Lichtes, die riesige Pyramide senkt sich langsam in dem Maasse, als die condensirten Dämpfe sich vermöge ihrer Schwere senken, oder sobald der Landwind sich erhebt und die Dämpfe von der Küste abtreibt, verschwindet das riesige Phantom plötzlich und nur die kleine Lichtpyramide auf dem horizontalen hellen Streifen bleibt sichtbar, die dann auch 2 bis 2½ Stunden nach Sonnenuntergang erlischt, nachdem sie mit größerer oder geringerer Schärfe ihrer Umrisse ihre anfängliche Höhe am Himmel beibehalten hat.

Da nach A. von Humboldt's Ausspruch das Zodiacallicht der fast stetige Schmuck tropischer Nächte ist, und die Erscheinungen der fünften Gruppe mit den Beschreibungen dieses Phänomens übereinstimmen, außerdem keine dem Zodiacallicht ähnlichen von mir beobachtet wurden, so liegt mir die Vermuthung nahe, daß das was sich als Nachspiel des Abendlichtes darstellte, mit dem identisch sey, was als Zodiacallicht bezeichnet worden ist. Auffällig und mit den Versuchen, das Zodiacallicht aus siderischem Ursprung abzuleiten, nicht im Einklange scheinen mir außer dem Zusammenhange mit dem Abendlichte die zwei

Thatsachen: 1) Dafs das Mondlicht dem Phänomene eine besondere Lichtstärke verleiht, welche so bedeutend ist, dafs aus dem gröfsern Glanze desselben mit vollständiger Sicherheit auf die Beimischung des Mondeinflusses geschlossen werden kann, auch welche derselbe noch bis 30 Minuten lang unter dem Horizonte verborgen bleibt. 2) Dafs das pyramidale Licht bis zum völligen Erlöschen eine Verringerung seiner Höhe, welche es nach dem Thau- fälle eingenommen hat, kaum wahrnehmen läfst. Welche Gründe die Annahme siderischer Ursachen für die Erklärung des Zodiacallichtes nothwendig erscheinen liefsen, und die Frage, ob nach dem jetzigen Stande der Wissenschaft dieselbe Nothwendigkeit noch andauert, liegt hier zu beantworten nicht vor; es war meine Aufgabe zu berichten, was ich gesehen habe.

Bahia 1869.

---

**III. Ueber die Ersetzbarkeit geschlossener galvanischer Ströme durch magnetische Doppelflächen, insbesondere über die Ersetzung eines beliebigen Oberflächen spiralförmig umziehenden Stromes durch eine räumliche Vertheilung magnetischer Massen; von E. Riecke.**

(Der Ges. d. Wiss. zu Göttingen im Auszuge mitgetheilt am 5. März 1870.)

- 
1. Erinnerung an den Ampère'schen Satz über die Wirkung geschlossener galvanischer Ströme.

Wenn eine geschlossene Curve von einem galvanischen Strom durchflossen wird, so werden wir eine durch diese Curve hindurchgelegte und von derselben ringsum begrenzte Fläche als die Fläche des Stromes bezeichnen. Eipe auf dieser Fläche errichtete Senkrechte nennen wir die Normale der Stromfläche, und zwar verstehen wir un-

ter der positiven Richtung der Normale diejenige, welche von einer in dem Strome schwimmenden und gegen den Mittelpunkt der Stromfläche hinsehenden menschlichen Figur markirt wird mit ausgestreckter Linken.

Mit Bezug auf die elektromagnetische Wirkung eines solchen Stromes gilt nun der bekannte Ampère'sche Satz:

Ein geschlossener galvanischer Strom kann in seiner Wirkung auf einen magnetischen Punkt ersetzt werden durch eine magnetische Doppelfläche, welche in folgender Weise construirt wird: Zu beiden Seiten der Stromfläche und in gleichem Abstände von ihr legen wir zwei Parallelflächen zu derselben, von welchen diejenige, welche gegen die Stromfläche in der Richtung der positiven Normale verschoben erscheint als die dem Strome zugewandte, die auf der entgegengesetzten Seite der Stromfläche befindliche als die von dem Strome abgewandte bezeichnet werden möge. Diese beiden Parallelflächen belegen wir gleichförmig mit magnetischer Masse, und zwar die dem Strome zugewandte mit positiver, die abgewandte mit negativer Masse. Die Dichtigkeit der Belegung machen wir auf beiden Blättern der Doppelfläche gleich der Stromintensität dividirt durch die Dicke der Doppelfläche, d. h. durch den Abstand der beiden Blätter von einander.

Es gilt dieser Satz auch für zwei geschlossene galvanische Ströme, welche zwischen sich eine ringförmige Stromfläche einschließen, wenn die beiden Ströme gleiche Intensität aber entgegengesetzte Richtung besitzen.

Zunächst ist jedoch der Ampère'sche Satz nur dann anwendbar, wenn die höheren Potenzen der Dicke der magnetischen Doppelfläche vernachlässigt werden können gegen die entsprechenden Potenzen der Entfernung des betrachteten Punktes von der Doppelfläche, und es muß demnach die Stromfläche stets so gewählt werden, daß diese Bedingung erfüllt wird. Man kann indessen durch andere Rücksichten an eine bestimmte Gestalt der Stromfläche gebunden seyn, z. B. bei einer ebenen Stromcurve an das von derselben begränzte ebene Flächenstück, und

in diesem Falle wird die angeführte Bedingung keineswegs für alle Lagen des magnetischen Punktes erfüllt seyn; es kann dann der Fall eintreten, daß der betrachtete Punkt auf die magnetische Doppelfläche selbst zu liegen kommt. Die hiedurch entstehende Schwierigkeit läßt sich umgehen, indem man an Stelle des endlichen, von der Stromcurve begränzten ebenen Flächenstücks, das von derselben begränzte ins Unendliche sich ausdehnende Flächenstück als Stromfläche benutzt, indessen kann auch das erstere Flächenstück beibehalten werden, da sich nur für den Fall, daß der betrachtete Punkt der magnetischen Doppelfläche selbst angehört, eine Modification des Ampère'schen Satzes ergibt.

2. Der Ampère'sche Satz für Punkte, welche der magnetischen Doppelfläche selbst angehören.

Wir werden uns im Folgenden beschränken auf die Betrachtung ebener Ströme, und wir werden hiebei als Stromfläche jederzeit das von der Stromcurve umschlossene ebene und endliche Flächenstück betrachten. Wir setzen ferner voraus, daß das Coordinatensystem, auf welches wir die Punkte des Raumes beziehen, so gewählt sey, daß die  $z$ -Axe desselben senkrecht stehe gegen die Stromfläche, und daß ihre positive Richtung zusammenfalle mit der positiven Richtung der Stromnormale.

Ehe wir auf den Ampère'schen Satz selbst eingehen, möge eine Bemerkung über das Potential magnetischer Doppelflächen vorangeschickt werden. Das Potential einer solchen Doppelfläche auf einen äußeren Punkt, dessen Coordinaten  $x, y, z$  seyn mögen, ist repräsentirt durch eine Function  $v$  von  $x, y, z$ , und zwar durch eine Function, welche sich mit der Lage des betrachteten Punktes stetig ändert, auch wenn dieser auf seiner Bahn die magnetische Doppelfläche durchbricht. Unter diesen Umständen stellt aber die Function  $v$  nicht in allen Punkten der Bahn das Potential der magnetischen Doppelfläche

dar, es ergibt sich vielmehr aus dem bekannten Gauß'schen Satze über das Potential einer Oberflächenbelegung folgende Bemerkung:

Bezeichnen wir durch  $v$  diejenige stetige Function von  $x, y, z$ , welche in allen außerhalb der magnetischen Doppelfläche gelegenen Punkten das Potential dieser Fläche repräsentirt, so hat das Potential der Doppelfläche für einen Punkt der auf einem der beiden Blätter selbst liegt, den Werth

$$v + 2\pi k z,$$

für einen Punkt der zwischen den beiden Blättern der Doppelfläche liegt, den Werth

$$v + 4\pi k z,$$

wo wir unter  $k$  die Dichtigkeit der Belegung, unter  $z$  die der  $z$ -Axe parallele Coordinate des betrachteten Punktes verstehen.

Es sey nun zunächst ein kreisförmiger galvanischer Strom gegeben, unter dessen Axe die durch den Kreismittelpunkt hindurchgehende Normale verstanden werden soll. Das Potential dieses Stromes auf einen in der Axe liegenden Punkt läßt sich darstellen durch eine Function  $w$  der  $z$ -Coordinate dieses letzteren; das Potential der dem Strome entsprechenden magnetischen Doppelfläche stellt sich ebenfalls dar durch eine Function von  $z$ , welche durch  $v$  bezeichnet werden möge. Unter der Voraussetzung nun, daß die höheren Potenzen der Dicke der magnetischen Doppelfläche vernachlässigt werden können gegen die entsprechenden Potenzen der Entfernung des betrachteten Punktes von dem Umfange des Stromkreises, ergibt sich, daß die Functionen  $v$  und  $w$  für alle Punkte der Axe identisch sind. Es ist also unter dieser Voraussetzung auch das Potential des Kreisstromes identisch mit dem Potential der entsprechenden magnetischen Doppelfläche für alle Punkte der Axe mit Ausnahme derjenigen, welche der magnetischen Doppelfläche selbst angehören. Für diese letzteren aber ergibt sich aus der vorhergehenden Bemerkung das Resultat.

Bezeichnen wir durch  $w'$  und  $v'$  die Werthe, welche die Potentiale des gegebenen Stromes und der entsprechenden magnetischen Doppelfläche in denjenigen Punkten der Axe besitzen, in welchen dieselbe die beiden Blätter der magnetischen Doppelfläche durchschneidet, die Werthe der Potentiale in den zwischen beiden Blättern gelegenen Punkten der Axe durch  $w''$  und  $v''$ , so finden die Beziehungen statt:

$$w' = v' - \frac{\pi i z}{\delta}$$

$$w'' = v'' - \frac{2\pi i z}{\delta},$$

wo unter  $i$  die Stromstärke, unter  $2\delta$  die Dicke der magnetischen Doppelfläche zu verstehen ist.

Gehen wir über zu dem allgemeinen Fall, in welchem die Stromcurve durch eine beliebige ebene Curve repräsentirt ist, so können wir in folgender Weise verfahren. Um den Punkt, auf welchen die Wirkung des Stromes bestimmt werden soll, beschreiben wir eine Kugel, deren Halbmesser so groß ist, daß wir gegen die höheren Potenzen desselben die entsprechenden Potenzen der Dicke der magnetischen Doppelfläche vernachlässigen können; eine um den betrachteten Punkt beschriebene Kugel, welche diese Eigenschaft besitzt, möge als Kugel  $K$  bezeichnet werden.

Wenn diese Kugel das von der Stromcurve begränzte ebene Flächenstück, die Stromfläche, gar nicht schneidet, so ist die Anwendbarkeit des Ampère'schen Satzes von vornherein einleuchtend.

Es kann jedoch zweitens der Fall eintreten, daß die Kugel  $K$  die Stromfläche, aber nicht die Stromcurve schneidet, daß also der Schnitt mit der Stromfläche durch einen vollen Kreis repräsentirt wird. In diesem Falle können wir zu dem ursprünglich gegebenen Strom, ohne in der Wirkung desselben etwas zu ändern, noch zwei Ströme von derselben Stärke hinzunehmen, welche den Umfang jenes Kreises in entgegengesetzter Richtung durchfließen.



Auf den ursprünglich gegebenen Strom und den ihm entgegengesetzten Kreisstrom findet der Ampère'sche Satz unmittelbare Anwendung; wir können diese beiden Ströme ersetzen durch die von ihnen eingeschlossene ringförmige Doppelfläche. Es bleibt dann übrig derjenige Kreisstrom, welcher mit dem gegebenen gleich gerichtet ist. Der betrachtete magnetische Punkt liegt aber in der Axe dieses letzteren Kreisstromes, und es ergibt sich daher aus dem vorbergehenden, daß wir auch diesen ersetzen können durch die zugehörige Doppelfläche: diese kreisförmige Doppelfläche mit der ringförmigen zusammengenommen, bildet aber wieder die ganze dem ursprünglich gegebenen Strom entsprechende Doppelfläche; es zeigt sich somit, daß der Ampère'sche Satz in dem betrachteten Falle ebenfalls seine Gültigkeit behält. Unsere Betrachtungen erleiden nur dann eine Modification, wenn der betrachtete Punkt der Doppelfläche selbst angehört. Zu dem Potential des ursprünglich gegebenen Stromes können wir in diesem Falle wieder hinzunehmen die Potentiale der beiden Ströme, welche den auf der Stromfläche ausgeschnittenen Kreis in entgegengesetzter Richtung durchfließen; die Summe der Potentiale des gegebenen Stromes und des ihm entgegengesetzten Kreisstromes ist wieder gleich dem Potential der zwischen ihnen liegenden ringförmigen Doppelfläche; das Potential  $w$  des mit dem gegebenen gleichgerichteten Kreisstromes ist aber nicht mehr gleich dem Potential  $v$  der Doppelfläche, sondern es finden zwischen diesen Potentialen die Beziehungen statt

$$w = v - \frac{\pi i z}{\delta}$$

oder

$$w = v - \frac{2 \pi i z}{\delta},$$

je nachdem der betrachtete Punkt auf einem der beiden Blätter der Doppelfläche selbst liegt, oder zwischen beiden Blättern. Addiren wir auf der einen Seite dieser Gleichungen die Potentiale des gegebenen Stromes und des entgegengesetzten Kreisstromes, auf der andern Seite

das der Summe jener beiden gleiche Potential der ringförmigen magnetischen Doppelfläche, so sehen wir, daß die genannten Beziehungen sich ohne weiteres übertragen auf das Potential des ursprünglich gegebenen Stromes und der ihm zugehörigen Doppelfläche.

Wenn endlich die um den betrachteten Punkt beschriebene Kugel  $K$  von der Stromcurve selbst geschnitten wird, ist der Ampère'sche Satz gar nicht mehr anwendbar. Es ist dieß der Fall bei allen Punkten, welche eingeschlossen sind in einer Röhrenfläche, deren Axe die gegebene Stromcurve ist, und welche alle Kugeln  $K$  umhüllt, die wir aus den einzelnen Punkten der Stromcurve als Mittelpunkten beschreiben können.

3. Ersetzung eines eine beliebige Oberfläche spiralförmig umziehenden Stromes durch eine räumliche Vertheilung magnetischer Massen.

An Stelle des Stromes, welcher die gegebene Oberfläche spiralförmig umwindet, setzen wir zunächst ein System einzelner galvanischer Ströme, welche auf der Oberfläche in folgender Weise vertheilt sind. Mit der gegebenen Oberfläche denken wir uns fest verbunden eine Richtung  $z$ , welche wir als die Axe der Fläche bezeichnen wollen. Auf dieser Axe tragen wir, die Entfernung zweier aufeinanderfolgenden Windungen des Stromes ab, und theilen dieselbe hiedurch in eine ebenso große Anzahl gleicher Segmente, als die durch den Strom gebildete Spirale Windungen besitzt. Durch die Mitte jedes Segments führen wir eine Ebene senkrecht zur Axe; dem System der so bestimmten Ebenen entspricht auf der Oberfläche ein System von Curven, und diese Curven sind es, welche als Bahnen derjenigen galvanischen Ströme betrachtet werden sollen, die wir an Stelle des gegebenen Stromes substituiren. Die Stärke aller dieser Ströme ist natürlich gleich der Stärke des ursprünglich gegebenen Stromes, die Richtung übereinstimmend mit der Richtung des letztern. Wir setzen voraus, daß diese Richtung von

der Art ist, daß die positiven Stromnormalen mit der positiven Richtung der Flächenaxe  $z$  zusammenfallen.

Auf das so definirte Stromsystem werden wir nun den Ampère'schen Satz in Anwendung bringen. Um zunächst die Gränzen, innerhalb derer diese Anwendung gestattet ist, festzulegen, construiren wir um alle Strombahnen des Systemes die entsprechenden Umhüllungsflächen der Kugeln  $K$ , wobei wir die Dicke der magnetischen Doppelflächen gleich dem Abstände der einzelnen Strombahnen nehmen. Die so erhaltenen Röhrenflächen besitzen dann wieder eine gemeinsame Umhüllungsfläche, und die Ersetzung der einzelnen Ströme durch magnetische Doppelflächen ist dann für alle außerhalb dieser letzteren Umhüllungsfläche liegenden Punkte gestattet. Man sieht leicht, daß dieselbe in zwei Parallellflächen zu der gegebenen Oberfläche zerfällt, welche nach innen und außen in einem Abstände von derselben sich befinden, der gleich dem Halbmesser der Kugeln  $K$  ist. Wir werden im folgenden immer voraussetzen, daß die von uns betrachteten Punkte außerhalb des von den beiden Parallellflächen eingeschlossenen Raumes sich befinden, daß also die Ersetzung der Ströme durch magnetische Doppelflächen stets in Anwendung gebracht werden kann.

Wir behandeln zunächst den Fall, daß der betrachtete magnetische Punkt außerhalb der von den Strömen umzogenen Oberfläche liegt. Wir ersetzen jeden einzelnen Strom des Systemes durch die entsprechende magnetische Doppelfläche; das mit nördlichem Fluidum belegte Blatt dieser Fläche wollen wir bezeichnen als die Nordpolfläche, das mit südlichem Fluidum belegte Blatt als die Südpolfläche des entsprechenden Stromes. Wenn wir den Abstand der beiden Blätter einer Doppelfläche gleich den auf der Axe abgetragenen kleinen Segmenten machen, so wird immer eine Nordpolfläche des vorhergehenden, und eine Südpolfläche des folgenden Stromes durch den gemeinsamen Endpunkt zweier aufeinander folgender Segmente der Axe hindurchgehen, sie werden also vereinigt

liegen. Bezeichnen wir die Stromstärke durch  $i$ , die Zahl der Strombahnen, welche auf die Längeneinheit der Axe kommen, durch  $n$ , so ergibt sich für die Dichtigkeit der Belegung sowohl auf den mit nördlichen als auf den mit südlichem Fluidum belegten Flächen der Werth  $n.i$ ; es heben sich also immer die Wirkungen der zusammenfallenden Theile zweier vereinigt liegender Polflächen auf. Uebrig bleiben nur die Wirkungen der ringförmigen Flächenstücke, um welche die eine dieser Polflächen die andere überragt. Diese ringförmigen Flächenstücke sind in den Theilen der Oberfläche, in welchen die innere Normale mit der Flächenaxe einen stumpfen Winkel macht, mit positivem, in den Theilen der Oberfläche, in welchen jener Winkel ein spitzer ist, mit negativem Fluidum von der Dichte  $n.i$  belegt zu denken. Jedes Element  $ds$ , welches einem jener ringförmigen Flächenstücke angehört, kann angesehen werden als Projection eines entsprechenden Elementes  $do$  der gegebenen Oberfläche; es ist daher

$$ds = \mp do \cos (p_i, z)$$

wo das negative oder positive Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem die innere Normale  $p_i$  in dem Element  $do$  mit der Axe  $z$  einen stumpfen oder einen spitzen Winkel einschließt. Jedes Element  $ds$  kann also in seiner Wirkung ersetzt werden durch ein entsprechendes Element  $do$  der gegebenen Oberfläche, dieses belegt gedacht mit magnetischem Fluidum von der Dichtigkeit

$$- n.i \cos (p_i, z).$$

Mit Bezug auf die Wirkung des die Oberfläche bedeckenden Stromsystemes, oder was auf dasselbe hinauskommt, des die Oberfläche umziehenden Stromes ergibt sich somit der Satz:

*Wenn eine beliebige Oberfläche spiralförmig von einem galvanischen Strome umzogen wird, so läßt sich dieser Strom in seiner Wirkung auf Punkte, die außerhalb der Oberfläche gelegen sind, ersetzen durch eine Belegung der Oberfläche mit magnetischer Masse; die Dichtigkeit dieser Belegung ist in jedem Punkte gegeben durch*

$$- n i \cos (p_i, z),$$

hier bezeichnet  $i$  die Stromstärke,  $n$  die Zahl der auf die Längeneinheit der Axe kommenden Windungen der Spirale, und  $p_i$  die innere Normale der Fläche in dem betrachteten Punct.

Durch eine einfache geometrische Interpretation des Ausdruckes  $-ni \cos(p_i, z)$  ergibt sich, daß jene Oberflächenbelegung aequivalent ist mit einer gleichförmigen Vertheilung magnetischer Massen innerhalb desjenigen Raumes, den unsere Oberfläche bei einer kleinen Verschiebung in der positiven Richtung der Axe beschreibt. Bezeichnen wir durch  $\delta$  die Gröfse dieser Verschiebung, so ist hiebei derjenige Raum, welcher der Fläche nur in ihrer zweiten Lage angehört, erfüllt zu denken mit positivem magnetischem Fluidum von der Dichte  $\frac{ni}{\delta}$ , der Raum, der ihr nur in der ersten Lage angehört mit negativem Fluidum von derselben Dichtigkeit.

Wir gehen nunmehr über zu dem zweiten Falle, in welchem der betrachtete magnetische Punkt sich im Innern der von dem Stromsystem bedeckten Oberfläche befindet.

Wenn wir an Stelle der einzelnen Ströme des Systemes wieder die entsprechenden magnetischen Doppelflächen einführen, so werden im Allgemeinen die Potentiale dieser magnetischen Doppelflächen auf den betrachteten Punkt identisch seyn mit den Potentialen der entsprechenden Ströme. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn der magnetische Punkt auf einer der Doppelflächen selbst, oder zwischen ihren beiden Blättern liegt. Es leuchtet aber ein, daß dieß bei irgend einer der magnetischen Doppelflächen mit Nothwendigkeit der Fall seyn muß. Liegt der betrachtete Punkt zwischen den beiden Blättern dieser Doppelfläche, so findet nach dem früheren zwischen dem Potential  $w$  des entsprechenden Stromes und dem Potential  $v$  der Doppelfläche die Beziehung statt:

$$w = v - 4\pi n i z$$

wo  $z$  die der  $z$ -Axe parallele Coordinate des betrachteten Punktes mit Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinaten-

system ist, dessen Anfangspunkt beliebig im Raume gelegen seyn kann, dessen  $z$ -Axe aber zu den Ebenen der Strombahnen senkrecht steht, und mit den positiven Stromnormalen gleich gerichtet ist.

Wenn aber der magnetische Punkt auf einem der Blätter der magnetischen Doppelfläche selbst liegt, so muß er gleichzeitig auch einer der Polflächen des nächstvorhergehenden oder des nächstfolgenden Stromes angehören. Bezeichnen wir in diesem Falle durch  $w$  und  $w'$  die Potentiale der beiden Ströme, auf deren gemeinsamer Polfläche der Punkt liegt, durch  $v$  und  $v'$  die Potentiale der entsprechenden magnetischen Doppelflächen, so finden nach dem früheren die Beziehungen statt:

$$w = v - 2\pi n i z$$

$$w' = v' - 2\pi n i z$$

und daher

$$w + w' = v + v' - 4\pi n i z.$$

Während also im Allgemeinen die Potentiale der Ströme identisch sind mit den Potentialen der entsprechenden magnetischen Doppelflächen, müssen wir von dem Potential derjenigen Doppelfläche, zwischen deren Blättern der betrachtete Punkt liegt, oder von der Summe der Potentiale derjenigen benachbarten Doppelflächen, deren gemeinsamer Polfläche der betrachtete Punkt angehört, die GröÙe  $4\pi n i z$  in Abzug bringen, um das Potential, beziehungsweise die Summe der Potentiale der entsprechenden Ströme zu erhalten. Es ergibt sich daher, daß die Summen der Potentiale sämtlicher Ströme, d. h. das Potential des die Oberfläche spiralförmig umziehenden Stromes, an dessen Stelle jene Ströme substituirt sind, gleich ist der Summe der Potentiale sämtlicher Doppelflächen vermindert um die GröÙe  $4\pi n i z$ . Das Potential sämtlicher Doppelflächen zusammen genommen reducirt sich aber auf das Potential der schon im vorhergehenden eingeführten Belegung der Oberfläche mit magnetischem Fluidum, oder der räumlichen Vertheilung magnetischer Massen, welche mit jener Oberflächenbelegung gleichwerthig ist. Wir ge-

langen somit für die Wirkung des gegebenen Stromes auf einen im Innern der Oberfläche liegenden Punkt zu dem Resultat:

*Das Potential, welches ein eine gegebene Oberfläche spiralförmig umziehender galvanischer Strom von der Stärke  $i$ , auf einen im Innern gelegenen Punkt ausübt, ist gleich dem Potential, welches die den Strom in seiner Wirkung auf äußere Punkte ersetzende magnetische Belegung der Oberfläche auf denselben Punkt ausübt, vermindert um die Gröfse*

$$4\pi n i z,$$

wo  $n$  die Zahl der auf die Längeneinheit der Axe kommenden Windungen ist, und die  $z$ -Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems gleichgerichtet angenommen wird mit der positiven Richtung der Stromnormalen.

Wir betrachten noch den Fall, daß sich im Innern der gegebenen Oberfläche nicht ein einzelner magnetischer Punkt, sondern ein magnetischer Körper von innerhalb der Gültigkeitsgränzen des Ampère'schen Satzes beliebiger Gestalt und Gröfse befindet. Wir lösen diesen Körper auf in ein System einzelner magnetischer Pole, welche durch  $\mu, \mu_1, \mu_2 \dots$  bezeichnet werden mögen. Die Werthe, welche das Potential des gegebenen Stromes in diesen Polen besitzt, seyen  $w, w_1, w_2 \dots$  die entsprechenden Werthe des Potentials der magnetischen Oberflächenbelegung  $v, v_1, v_2 \dots$ ; es finden dann folgende Beziehungen statt:

$$w = v - 4\pi n i z$$

$$w_1 = v_1 - 4\pi n i z_1$$

$$w_2 = v_2 - 4\pi n i z_2$$

$$\dots \dots \dots$$

wo unter  $z, z_1, z_2 \dots$  die  $z$ -Coordinaten der Punkte  $\mu, \mu_1, \mu_2 \dots$  zu verstehen sind. Multipliciren wir diese Gleichungen beziehungsweise mit  $\mu, \mu_1, \mu_2 \dots$ , so ergibt sich durch Addition:



$$\begin{aligned}
 & \mu w + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots \\
 &= \mu v + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots \\
 &\quad - 4\pi n i (\mu z + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \dots),
 \end{aligned}$$

oder

$$\Sigma \mu w = \Sigma \mu v - 4\pi n i \Sigma \mu z.$$

Es ist aber  $\Sigma \mu w$  nichts anderes als das Potential, welches von dem gegebenen Strome auf das System aller Pole zusammengenommen, d. h. auf den gegebenen magnetischen Körper ausgeübt wird; ebenso ist  $\Sigma \mu v$  das Potential der magnetischen Belegung der Oberfläche auf denselben Körper; endlich ist  $\Sigma \mu z$  nichts anderes, als das magnetische Moment dieses Körpers in der Richtung der  $z$ -Axe oder der damit übereinstimmenden Flächenaxe. Wir erhalten somit den Satz.

Das Potential, welches ein eine gegebene Oberfläche spiralförmig umziehender Strom auf einen im Innern dieser Oberfläche befindlichen magnetischen Körper ausübt, ist gleich dem Potential der mit dem Strome in seiner Wirkung auf äußere Punkte äquivalenten Oberflächenbelegung vermindert um das Product aus  $4\pi n i$  in das magnetische Moment des Körpers nach der Richtung der Flächenaxe; die Zeichen  $n$  und  $i$  haben hier dieselbe Bedeutung wie früher.

4. Wirkung eines ein Ellipsoid spiralförmig umziehenden Stromes auf einen Punkt im Inneren des Ellipsoides.

Von den Anwendungen, welche die vorhergehenden Sätze gestatten, möge hier auf eine einzige näher eingegangen werden, nämlich auf den Fall, daß die gegebene Oberfläche ein Ellipsoid ist.

Das Coordinatensystem wählen wir so, daß die Axen desselben zusammenfallen mit den Axen des Ellipsoides. Die durch den Mittelpunkt des Ellipsoides hindurchgehende Axe der Spirale, welche die Windungen des Stromes auf der Oberfläche des Ellipsoides beschreiben, be-

zeichnen wir durch  $D$ , so daß die Richtung von  $D$  zusammenfällt mit der positiven Richtung der Stromnormalen; die Richtungs cosinusse von  $D$  seyen  $m$ ,  $p$  und  $r$ . Die räumliche Vertheilung magnetischer Massen, welche mit dem gegebenen Strome in seiner Wirkung auf äußere Punkte äquivalent ist, ergibt sich dadurch, daß wir das Ellipsoid in der Richtung der Axe  $D$  verschieben um eine kleine Strecke  $\delta$ , und daß wir dann den Raum, der dem Ellipsoid nur in seiner zweiten Lage angehört uns angefüllt denken mit positivem magnetischen Fluidum von der Dichtigkeit  $\frac{ni}{\delta}$ , den Raum, der ihm nur in der ersten Lage angehört mit negativem Fluidum von derselben Dichtigkeit.

Wir wollen zunächst das Potential der so erhaltenen räumlichen Vertheilung magnetischer Massen auf den im Innern gelegenen Punkt ermitteln. Es läßt sich dies bekanntlich in folgender Weise leicht ausführen. Das Potential der betrachteten magnetischen Massenvertheilung, welches durch  $v$ , bezeichnet werden möge, läßt sich ansehen als die Summe zweier Potentiale, von denen das eine dem Ellipsoid in seiner ursprünglichen Lage, dieses erfüllt gedacht mit negativer magnetischer Masse von der Dichtigkeit  $\frac{ni}{\delta}$ , das zweite dem Ellipsoid in seiner zweiten Lage, erfüllt gedacht mit positiver magnetischer Masse von derselben Dichtigkeit angehört.

Das Potential des Ellipsoides in seiner ersten Lage erfüllt gedacht mit positiver magnetischer Masse von der Einheit der Dichtigkeit wollen wir bezeichnen durch  $U$ , die Coordinaten des betrachteten Punktes seyen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Das Potential des um  $\delta$  in der Richtung  $D$  verschobenen Ellipsoides auf den Punkt  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ist dann offenbar gleich dem Potential des ursprünglichen Ellipsoides auf einen Punkt, welcher gegen den Punkt  $x$ ,  $y$ ,  $z$  verschoben ist um  $-\delta$ , welcher also die Coordinaten besitzt

$$x - m\delta, y - p\delta, z - r\delta.$$

Das Potential des ursprünglichen mit der Einheit der Dichtigkeit erfüllten Ellipsoïdes auf diesen Punkt ist aber

$$U(x - m\delta, y - p\delta, z - r\delta) = U(x, y, z) \\ - \delta \left\{ m \frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y} + r \frac{\partial U}{\partial z} \right\}.$$

Folglich ist auch das Potential des verschobenen und mit der Einheit der Dichtigkeit erfüllten Ellipsoïdes auf den Punkt  $x, y, z$

$$U' = U - \delta \left\{ m \frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y} + r \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$$

und das Potential des verschobenen Ellipsoïdes, wenn wir uns dasselbe erfüllt denken mit magnetischer Masse von der Dichtigkeit  $\frac{ni}{\delta}$

$$\frac{ni}{\delta} \cdot U' = \frac{ni}{\delta} U - ni \left\{ m \frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y} + r \frac{\partial U}{\partial z} \right\}.$$

Das Potential des Ellipsoïdes in seiner ursprünglichen Lage erfüllt gedacht mit negativer magnetischer Masse von der Dichtigkeit  $\frac{ni}{\delta}$  ist gleich

$$- \frac{ni}{\delta} U.$$

Addiren wir diese beiden Potentiale, so ergibt sich für das Potential der Oberflächenbelegung der Werth

$$V_i = - ni \left\{ m \frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y} + r \frac{\partial U}{\partial z} \right\}.$$

$U$  bezeichnet das Potential des gegebenen mit Masse von der Einheit der Dichtigkeit erfüllt gedachten Ellipsoïdes auf den in seinem Inneren gelegenen Punkt  $x, y, z$ . Es sind somit

$$- \frac{\partial U}{\partial x}, \quad - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad - \frac{\partial U}{\partial z}$$

die Componenten der Wirkung, welche das Ellipsoïd unter dieser Voraussetzung auf den Punkt  $x, y, z$  ausübt, wenn wir uns in diesem die Einheit der Masse vorhanden denken. Diese Componenten lassen sich aber bekanntlich in folgender Form darstellen:

$$X = Mx, \quad Y = Py, \quad Z = Rz,$$

wo  $M, P, R$  gewisse von den Dimensionen des Ellipsoïdes abhängige Größen darstellen. Substituiren wir diese Ausdrücke an Stelle von  $-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}$ , in dem Ausdrucke für das Potential  $U$  der Oberflächenbelegung, so ergibt sich:

$$V_i = ni \{ Mmx + Ppy + Rrz \}.$$

Es ist somit  $V_i$  eine lineare Function der Coordinaten des betrachteten Punktes und daher ist die Wirkung der Oberflächenbelegung constant für alle im Inneren gelegenen Punkte.

Es sey nun andererseits  $\Omega_i$  das Potential des gegebenen Stromes auf den betrachteten magnetischen Punkt; fällen wir von diesem eine Senkrechte auf die Flächenaxe  $D$ , so schneidet diese auf  $D$ , vom Anfangspunkt des Coordinatensystemes an gerechnet, eine Strecke ab, welche durch  $d$  bezeichnet werden möge. Zwischen den Potentialen  $\Omega_i$  und  $V_i$  findet dann die Beziehung statt,

$$\Omega_i = V_i - 4\pi nid.$$

Es ist aber

$$d = mx + py + rz.$$

Setzen wir diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung ein und substituiren wir gleichzeitig für  $V_i$  den oben gegebenen Ausdruck, so ergibt sich

$$\Omega_i = ni \{ (M - 4\pi)mx + (P - 4\pi)py + (R - 4\pi)rz \}.$$

Es ist somit auch  $\Omega_i$  eine lineare Function der Coordinaten und daher auch die Wirkung des gegebenen Stromes auf alle Punkte im Innern constant.

Wir haben somit den Satz:

Ein spiralförmig von einem galvanischen Strom umzogenes Ellipsoïd übt auf einen in seinem Inneren befindlichen magnetischen Punkt eine constante von der Lage desselben unabhängige Wirkung aus. Das Potential dieser Wirkung hat den Werth:

$$\Omega_i = ni \{ (M - 4\pi)mx + (P - 4\pi)py + 4(R - 4\pi)rz \},$$

wo  $x, y, z$  die Coordinaten des betrachteten Punktes mit Bezug auf die Hauptaxen des Ellipsoides,  $n$  die Zahl der Windungen, welche auf die Längeneinheit der Axe der Spirale kommen,  $m, p$  und  $r$  die Richtungscosinusse dieser Axe bezeichnen. Endlich sind  $M, P$  und  $R$  gewisse von den Dimensionen des Ellipsoides abhängige Constante, welche für ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegeben ist, dargestellt sind durch die elliptischen Integrale:

$$M = \frac{4\pi bc}{a^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)u^2} \sqrt{1 + \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)u^2}}$$

$$P = \frac{4\pi ca}{b^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 + \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right)u^2} \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)u^2}}$$

$$R = \frac{4\pi ab}{c^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)u^2} \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{c^2} - 1\right)u^2}}$$

Die Uebereinstimmung der im dritten Abschnitt gegebenen Oberflächenbelegung mit der ebendasselbst angeführten räumlichen Vertheilung magnetischer Massen dürfte allgemein bekannt seyn; mir wurde dieselbe vor mehreren Jahren von Prof. Carl Neumann mitgetheilt. Der im letzten Abschnitte für das Ellipsoid entwickelte Satz ist, wie ich von Prof. Heinrich Weber erfuhr, bereits von Neumann in Königsberg gefunden; da sich derselbe aber als eine sehr einfache Anwendung des von mir gegebenen allgemeinen Satzes ergibt, und so viel mir bekannt wurde, nirgends veröffentlicht ist, glaubte ich denselben nicht unterdrücken zu sollen.

Göttingen im November 1871.

#### IV. Ueber den Durchgang der Elektricität durch Gase; von G. Wiedemann und R. Rühlmann.

(Aus d. Bericht. d. Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Oct. 1871,  
von HH. Verf. mitgetheilt.)

##### §. 1. Einleitung.

Bestehen in zwei benachbarten Körpern, welche durch Zwischenmittel von einander getrennt sind, elektrische Differenzen, so können sich dieselben in zwei wesentlich verschiedenen Arten mit einander ausgleichen, von denen die eine durch die Stetigkeit des Processes, die andere durch die Discontinuität desselben charakterisirt ist.

Die erste Art der Entladung zeigt sich, wenn die Ausgleichung der elektrischen Differenz durch einen Leiter geschieht, die zweite, wenn das Zwischenmittel ein Nichtleiter ist. Vorgänge der letztgenannten Art sind die Uebergänge der Elektricitäten in Form von Funken, Büscheln und Glimmlicht. An irgend einer Stelle erreicht die elektrische Spannung ein gewisses Maafs, dann erfolgt ein fast momentaner Uebergang einer gröfseren Menge Elektricität. Wenn die Spannung wieder nahezu die vorige Gröfse erreicht hat, erfolgt der nämliche Vorgang von Neuem usf.

Schon lange weifs man, dafs die zwischen Elektroden in der Luft übergelenden Funken discontinuirliche Entladungen vermitteln. Dafs auch die Büschelentladung auf einem ähnlichen Vorgange beruht, konnte man schon daraus entnehmen, dafs nicht selten beim Ausströmen von Elektricität aus Spitzen ein Ton vernommen wird, ein Beweis, dafs hier ein Process vor sich geht, der sich mit grofser Geschwindigkeit periodisch wiederholt. Beobachtet man die Bilder der elektrischen Büschelentladung, wie sie vorzugsweise an einer mit dem positiven Conductor der Elektrisirmaschine verbundenen Elektrode in der Luft auf-

treten, in einem rotirenden Spiegel, so erscheinen sie als eine Reihe scharf gezeichneter, baumartig verästelter Entladungen, welche von einander vollständig geschieden sind und sich ziemlich regelmäfsig einander folgen. Diese Erscheinungen sind schon von Faraday und Wheatstone<sup>1)</sup> beobachtet worden. Auch das Glimmlicht, jenes phosphorische Leuchten, welches sich vorzugsweise, wenn auch nicht ausschliesslich, an dem negativen Conductor der Elektrisirmaschine zeigt, läfst sich im rotirenden Spiegel in eine schnelle Aufeinanderfolge einzelner Entladungen auflösen.

Die Entladungen durch Büschel und Glimmlicht in atmosphärischer Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit finden zwar zum grofsen Theil in der die elektrisirte Elektrode umgebenden Luft selbst statt, wie die Untersuchung des Spectrums derselben ergiebt, meist tritt aber noch, namentlich bei der Büschelentladung, noch eine Fortschleuderung glühender, von der Elektrode fortgerissener Metalltheilchen hinzu, so dafs das Phänomen sich weniger einfach gestaltet. Zudem ist die Erscheinung nicht in dem Maafse regelmäfsig, dafs eine genauere Untersuchung zuverlässige Resultate verspricht. Stellt man indefs zwei, durch eine constante Elektrizitätsquelle entgegengesetzt geladene Elektroden von verschiedenem Stoff in hinlänglich *verdünnten* Gasen einander gegenüber, so verschwindet das Losreißen der Metalltheile von den Elektroden und die Unregelmäfsigkeiten werden völlig beseitigt. Vielfach hat man angenommen, die verdünnten Gase verhielten sich wie schlechte Leiter; man hat geglaubt, dafs die Entladungen continuirlich vor sich gingen, und die Gase beim Durchgang der Elektrizität wie metallische Leiter heifs und leuchtend würden. Man hat demnach versucht, den elektrischen Leitungswiderstand verdünnter Gasschichten, z. B. in Geißler'schen Röhren, ganz ähnlich zu messen, wie den der metallischen Leiter, und aus den Strominten-

1) Faraday, *Exp. Res.* 1431 u. folg. Wheatstone, *Phil. Trans.* 1835, *part II*, p. 583; Pogg. Ann. Bd. XXXIV, S. 468. 1835.



sitäten, welche man in den Zuleitungsdrähten zu einem Geißler'schen Rohr, sowie in metallischen Nebenleitungen zu einzelnen Längstheilen der Röhren beobachtete, auf die Widerstände einzelner Theile der verdünnten Gasschichten während der Entladung zu schliessen<sup>1)</sup>. Indess schon einige frühere Versuche des einen von uns (G. Wiedemann) hatten gezeigt, daß die in einer engen Geißler'-Spectralröhre durch die Ströme eines Inductoriums in der Zeiteinheit erzeugten Wärmemengen viel eher direct den Stromintensitäten proportional seyen, als den Quadraten derselben, wie das für die continuirliche Entladung in metallischen Leitern aufgestellte Joule'sche Gesetz erfordert. Auch ergibt die Beobachtung der Geißler'schen Röhren in einem Spiegel, der um eine der Röhre parallele Axe rotirt, zweifellos, daß hierbei die Entladungen discontinuirlich sind, selbst wenn man statt der in Stärke und Richtung alternirenden elektromotorischen Kraft des Inductionsapparates eine constant wirkende Elektrizitätsquelle, wie z. B. eine Elektrisirmaschine, zur Erzeugung der Spannungsdifferenz an den Elektroden des Rohres verwendet. Auch bei den schwächsten verwendbaren Drucken (bis zu  $\frac{1}{4}$  mm Quecksilberdruck) konnten im rotirenden Spiegel viele scharfgezeichnete, deutlich von einander getrennte Einzelbilder der Röhre erkannt werden, so daß auch hier einzelne, äußerst kurze Zeit andauernde und von einander durch Zwischenräume geschiedene Entladungen erfolgen. Die späteren Messungen ergaben, daß die Erscheinungen in den Geißler'schen Röhren ziemlich complicirten Gesetzen unterworfen sind, da augenscheinlich die auf der schlecht leitenden inneren Glaswand sich anhäufenden Elektrizitäten auf die zwischen den Elektroden stattfindenden Entladungen zurückwirken. Um deshalb möglichst einfache Resultate zu erhalten, wurde

1) Morren, *Ann. de Chim. et Phys.* (4) T. IV, p. 325. 1865. Pogg. Ann. Bd. CXXX, S. 612, de la Rive, *Compt. Rend.* T. VI, p. 669. 1863. *Archives de Gen. Nouv. Sér.* T. XVII, p. 53; vgl. auch Hit-  
torf, Pogg. Ann. Bd. CXXXVI, S. 201. 1869 etc.

zunächst die Entladung der Elektricitäten zwischen kugelförmigen Metallelektroden in einem größeren, mit verdünnten Gasen erfüllten Metallgefäße untersucht. Es handelte sich hierbei namentlich darum, die relativen Elektricitätsmengen zu messen, welche unter verschiedenen Umständen erforderlich sind, um eine Entladung in verdünnten Gasen hervorzurufen <sup>1)</sup>).

#### §. 2. Beschreibung des Apparates.

Der hierzu angewandte Apparat ist Taf. III, Fig. 2 übersichtlich dargestellt. Er besteht im Wesentlichen aus folgenden Theilen.

- 1) dem eigentlichen Entladungsapparat (I),
- 2) der zur Entleerung desselben dienenden Quecksilber-Luftpumpe (II),
- 3) einer zu einem Gasbehälter führenden Röhrenleitung (III),
- 4) 5) einer Holtz'schen Elektrisirmaschine (IV), deren Scheibe durch eine besondere Drehvorrichtung (V) in Rotation versetzt wurde,
- 6) einem Metronom (VI), um die Umdrehungszahl der Scheibe zu messen,
- 7) 8) einer heliometerartigen Vorrichtung (VII), vermittelt deren in einem rotirenden Spiegel (VIII) die Abstände der einzelnen Entladungen gemessen wurden,
- 9) einem Galvanometer, zu welchem eine Drahtleitung (IX) führte, um die Menge der in der Zeiteinheit den Entladungsapparat durchfließenden Elektricität zu messen.

In Fig. 1 ist der Entladungsapparat (I) nebst der heliometrischen Vorrichtung (VII), sowie der rotirende Spiegel (VIII) besonders abgebildet.

Der Entladungsapparat bestand aus einem Cylinder A von starkem Messingblech von 12<sup>cm</sup> Durchmesser und

- 1) Der experimentelle Theil dieser Untersuchung wurde schon in den Jahren 1869 und 1870 im physikalischen Cabinet zu Carlsruhe ausgeführt.

16<sup>cm</sup> Länge, welcher beiderseits durch zwei Halbkugeln von Messing geschlossen war. Die Halbkugeln trugen zwei Tubuli, *B* und *C*, in welche mittelst durchbohrter Kautschukstöpsel die Elektroden eingesetzt wurden. Dieselben bestanden aus verschieden großen Metallkugeln von verschiedenem Stoff, welche an Stahldrähte von 1<sup>mm</sup> Dicke angeschraubt waren. Die Drähte waren mit Glasröhren umgeben, welche an den Kugeln ganz fein ausgezogen waren, so daß sie sich daselbst unmittelbar an den Draht anlegten. Die Kautschukstöpsel wurden mittelst eines aus Wachs, Colophonium und Terpentin bestehenden, nicht zu harten Kittes luftdicht in die Tubuli eingesetzt. Derselbe Kitt wurde auch sonst auf die Oberfläche der Stöpsel und sämtliche Kautschukverbindungen warm aufgestrichen und geschmolzen. Nur so gelang es, bei Verdünnung der Luft im Apparat bis auf  $\frac{1}{4}$ <sup>mm</sup> Quecksilberdruck eine stundenlang andauernde vollkommene Dichtung zu erzielen. Der Abstand der vordersten Punkte der Elektrodenkugeln wurde nach Befestigung des Entladungsapparates in verticaler, statt horizontaler Stellung, mit Hülfe des Kathetometers gemessen. Der Cylinder *A* war an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen mit zwei 5<sup>cm</sup> langen und 2<sup>cm</sup> breiten, sorgfältig eingekitteten Scheiben *D* von Spiegelglas versehen, durch welche die Entladungen zwischen den Elektroden beobachtet werden konnten. An den Cylinder war ferner ein Rohr *F* angelöthet, an welches sich ein zweites Rohr *G* ansetzte. Beide Röhren konnten durch Metallhähne geschlossen werden. Der Cylinder selbst lag auf einem Gestell *H* von Holz, an welches er mittelst zweier, über die Tubuli *B* und *C* übergreifender Querleisten von Holz fest angeschraubt wurde. Das Rohr *F* war durch einen Schlauch von sehr dickem vulkanisirtem Kautschuk (von 2<sup>mm</sup> innerem und 15<sup>mm</sup> äußerem Durchmesser) mit einer Jolly'schen Quecksilber-Luftpumpe, deren Recipient  $1\frac{1}{2}$  Liter faßte, verbunden. Das Manometer derselben war durch ein größeres, aus einer 12<sup>mm</sup> weiten Glasröhre gebogenes Barometer er-

setzt, dessen Schenkel über 30<sup>cm</sup> lang waren. Dasselbe war nach dem Füllen mit Quecksilber sehr sorgfältig ausgekocht, wobei die offene Röhre des Manometers selbst mit der Luftpumpe verbunden und die Luft in demselben möglichst weit ausgepumpt war. Der Stand des Quecksilbers in den Schenkeln des Manometers wurde durch ein 1<sup>m</sup>,25 davon entferntes Kathetometer bis auf 0<sup>mm</sup>,1 genau abgelesen. — Das Rohr *G* stand mit einem, mit wasserfreier Phosphorsäure gefülltem, 30<sup>cm</sup> langen Glasrohr, einer oder zwei, mit concentrirter Schwefelsäure gefüllten Wulfschen Flaschen, einem sich daran schließenden, mit Chlorcalcium, und (in vielen Fällen) mit einem mit Stücken von kaustischem Kali gefüllten Rohre in Verbindung. Man überzeugte sich vor jedem Versuche, daß alle Theile des Apparates vollkommen luftdicht schlossen. Nach Oeffnen des Hahnes in Rohr *F* und Schließen des Hahnes in *G* wurde die Luft im Cylinder *A* evacuirt, sodann Hahn *F* geschlossen, *G* geöffnet, und somit durch die Röhrenleitung aus einem angesetzten Gasometer Gas in den Cylinder eingeführt. Nach wiederholtem, 5 bis 6 maligem Auspumpen auf 1<sup>mm</sup> Druck und abermaligem Zuführen von Gas konnte man annehmen, daß der Cylinder *A* mit hinreichend reinem Gase gefüllt war, um sichere Resultate zu ergeben. — Die äußern Enden der zu den Elektroden des Entladungsapparates führenden Drähte waren nach unten umgebogen und tauchten in zwei mit Quecksilber gefüllte Glasnäpfe *I* und *K*. In letztere wurden die Enden von zwei gleichen, 1<sup>m</sup> langen, mit Kautschuk bekleideten Kupferdrähten *k* und *i* eingelegt, deren andere Enden durch Paalzow'sche Klemmen mit den beiden Conductoren einer Holtz'schen Elektrisirmaschine älterer Construction<sup>1)</sup> verbunden waren. Die rotirende Scheibe der letztern hatte einen Durchmesser von 36<sup>cm</sup>; die feste, an zwei diametralen Stellen durchbohrte Scheibe war in einer sehr kleinen Entfernung von derselben (1<sup>mm</sup>) vollkommen festgestellt. Die an letzterer befestigten Aufsauger von

1) Holtz, Pogg. Ann. Bd. CXXVI, S. 157. 1865.

Pappe waren, um den Gang der Erscheinungen durchaus constant zu erhalten, durch 35<sup>mm</sup> breite Kämme von dünnem Messingblech ersetzt, in welche je 15<sup>mm</sup> lange Zähne eingeschnitten waren. Die rotirende Scheibe war nicht lackirt; sie wurde vor jeder Versuchsreihe sorgfältig mit Aether abgeputzt und mit einem getrockneten und erwärmten leinenen Tuch abgerieben. Auf die Axe der rotirenden Scheibe war ein mit einer Nuth versehenes Rad von Hartgummi von 5<sup>cm</sup> Durchmesser aufgesetzt, in welches sich ein Schnurlauf einlegte, der andererseits um die Peripherie einer schweren Holzscheibe *O* von 30<sup>cm</sup> Durchmesser gelegt war. Letztere Scheibe wurde durch eine Kurbel gedreht. An ihrer Peripherie war eine kleine Stahlfeder befestigt, die bei jeder Umdrehung gegen ein dünnes Holzbrett schlug. Neben der Scheibe stand ein Metronom (VI), so daß nach einiger Uebung die Umdrehungen der Scheibe gleichzeitig mit den Schlägen des letztern hergestellt werden konnten. Directe Messungen ergaben, daß einer Umdrehung der Holzscheibe je 5,456 Umdrehungen der Glasscheibe der Holtz'schen Maschine entsprechen.

Neben dem Quecksilbernapf *K* an dem Entladungsapparat befand sich ein dritter gläserner Quecksilbernapf *I*. In diesen tauchten die nebeneinander liegenden Enden zweier mit Kautschuk überzogener Kupfeedrähte *m* und *n*, welche parallel nebeneinander und durch zwischengelegte Glasstücke von einander isolirt, zu einer von Sauerwald nach den Angaben des einen von uns <sup>1)</sup> construirten Spiegelbussole führten, die etwa 3<sup>m</sup> von den erwähnten Apparaten entfernt, auf einem besondern, an der Wand des Zimmers befestigten Sockel aufgestellt war. In der Kupferhülse derselben schwebte ein magnetischer Stahlring, an dessen Axe oberhalb der Kupferhülse ein dünner Glaspiegel befestigt war. In diesem Spiegel wurden mittelst eines Fernrohres an einer 1½<sup>m</sup> entfernten Millimeter-scala die Ablenkungen des Magnetringes abgelesen. Unter

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. Bd. CXXXIX, S. 504. 1853.

Poggendorff's Annal. Bd. CXLV.

der Bussole befand sich in 25<sup>mm</sup> Entfernung von der horizontalen Axe des Ringes ein 20<sup>mm</sup> langer, horizontaler, astasirender Stahlmagnet, der seinen Nordpol nach Süden und seinen Südpol nach Norden wendete, und dessen Mittelpunkt in der Verlängerung der Drehungsaxe des Magnetringes lag. Oestlich und westlich von dem Magnetring befanden sich Drahtspiralen von mit Kautschuk überzogenem Kupferdraht, deren innerer und äußerer Durchmesser resp. 6 und 9<sup>cm</sup> betrug. Der Querschnitt der Windungen war ein Rechteck von 40<sup>mm</sup> Länge und 30<sup>mm</sup> Höhe, die Ebene der dem Stahlmagnet nächstliegenden Windungen war 15<sup>mm</sup> von demselben entfernt, die Zahl der Windungen auf beiden Spiralen zusammen betrug 160. Mit diesen hintereinander verbundenen Spiralen waren die Enden der Drähte *m* und *n* verbunden. Wurde nun während des Drehens der Scheibe der Holtz'schen Maschine der Draht *i* aus dem Quecksilbernapf *I* gehoben und in den Napf *L* eingelegt, dafür aber das Ende eines der Drähte *m* oder *n* aus dem Napfe *L* in den Napf *K* übergeführt, so durchfloß der von der Holtz'schen Maschine gelieferte elektrische Strom nur die Drahtwindungen der Spiegelbussole. Einige Vorversuche ergaben, daß die hierbei erhaltenen Ablenkungen genau dieselbe Gröfße hatten, wie wenn die Spiegelbussole gleichzeitig mit dem Entladungsapparat in den Schließungskreis eingeschaltet wurde. Man konnte so während der einzelnen Versuchsreihen jeweilen die durch die Maschine in Bewegung gesetzten Elektrizitätsmengen mit einander vergleichen. Wie die späteren Versuchsreihe zeigen, bleiben dieselben verhältnismäßig sehr constant.

Es handelte sich nun darum, die Zahl der Entladungen genau zu bestimmen, in denen die auf die eben angegebene Weise gemessene Elektrizitätsmenge zwischen den Elektroden des Entladungsapparates unter verschiedenen Bedingungen übergeht. Bei der Beobachtung der Entladungen in einem rotirenden Spiegel, dessen Rotationsaxe der Verbindungslinie der Elektroden parallel lag, ergaben sich

indess mannigfache Schwierigkeiten. Einmal erfolgten bei wiederholten Drehungen des Spiegels die Entladungen nicht jedesmal periodisch wieder bei derselben Stellung desselben, so daß die Spiegelbilder der aufeinander folgenden Entladungen nicht stets an derselben Stelle erschienen, sondern hin und her oscillirten; eine directe Zählung war dadurch absolut unmöglich. Sodann traten die Entladungen nicht immer in gleichen Zeitabständen auf, und die Spiegelbilder derselben erschienen deshalb nicht immer in genau gleichen Distanzen; offenbar weil die Abstände der rotirenden und festen Scheibe der Holtz'schen Maschine bei jeder Umdrehung periodisch sich änderten, und entsprechend die in gleichen Zeiten bei einer Rotation der beweglichen Scheibe um einen bestimmten kleinen Winkel erzeugten Elektricitätsmengen nicht stets die gleichen waren. Nach mehrfachen Versuchen gelang es, beide Schwierigkeiten durch eine einfache, aber für die Ausführung der ganzen Untersuchung entscheidende Abänderung befriedigend zu lösen. Der rotirende Spiegel wurde auf die Axe der rotirenden Scheibe der Holtz'schen Maschine selbst aufgesetzt. In diese Axe wurde hierzu ein 250<sup>mm</sup> langer und 6<sup>mm</sup> dicker Stahlstab *P* eingeschraubt, dessen freies Ende in einem besondern Lager ruhte. Auf diesen Stab war ein 40<sup>mm</sup> breiter und 120<sup>mm</sup> langer Glasspiegel *Q* mittelst einer geeigneten Metallfassung aufgeschraubt, vor welchem der Entladungsapparat in der Art aufgestellt war, daß die Verbindungslinie der Elektroden parallel der Axe der rotirenden Scheibe lag. Blickte man in diesen, mit der Scheibe der Maschine rotirenden Spiegel von einem bestimmten Punkt aus, so sah man allein diejenigen Entladungen in demselben, welche erzeugt wurden, während die Aufsauger der Maschine bei jeder Drehung der Scheibe nur von einem und demselben kleinen Ausschnitt der rotirenden Scheibe die daselbst angehäuften Elektricitäten aufnahmen. Bei der Kleinheit des Winkels dieses Ausschnittes, etwa 10°, blieben sich die Abstände der in dem Spiegel sichtbaren Entladungen von



einander fast vollkommen gleich. — Um auch die zweite der oben erwähnten Schwierigkeiten zu lösen, den Abstand der Spiegelbilder der Entladungen während der steten Veränderung ihrer Lage zu bestimmen, wurde versucht, die Spiegelbilder in der Mitte des Abstandes der Elektroden zu theilen und die eine Hälfte gerade um den Abstand der Bilder zweier aufeinanderfolgender Entladungen zu verschieben. Hierzu diente nach mehreren Versuchen am zweckmässigsten eine Vorrichtung, die der des Heliometers nachgebildet war. — Vor dem an der Axe der Elektrisirmaschine befestigten Spiegel, und zwar auf der Seite des Entladungsapparates und unterhalb desselben war eine Art Fernrohr aufgestellt, bestehend aus einem verticalen Brett, welches auf einem Statif aufgestellt und in der Mitte durch ein 7<sup>tes</sup> weites Loch durchbohrt war. Vor dem Loche befand sich als Objectivglas eine Sammellinse von 8<sup>tes</sup> Durchmesser und 30<sup>tes</sup> Brennweite. Dieselbe war durch einen verticalen Schnitt in zwei Hälften getheilt. Die eine Hälfte war vor der Hälfte des Loches im Brett festgekittet, die andere verschob sich in einem geeigneten Rahmen mittelst einer Schraubenvorrichtung in verticaler Richtung neben der andern Hälfte (vergl. Fig. I, Taf. III). Diese Verschiebung konnte mittelst eines an der Schraubenvorrichtung angebrachten Maassstabes mit Nonius bis auf 0,05<sup>mm</sup> genau abgelesen werden. Auf der Hinterseite des Brettes war ein horizontales Rohr befestigt, in welchem sich ein Auszug verschob, der als Oculer einen durchlöcherten Schirm oder eine Linse trug. Zur Einstellung des Apparates wurden zuerst die beiden Hälften der Objectivlinse so gestellt, daß ihre optischen Mittelpunkte möglichst dicht nebeneinander in derselben Horizontalebene lagen, und der Entladungsapparat so gedreht, daß man die Mitten seiner beiden Fenster und die Verbindungslinie der Elektroden genau mit der Rotationsaxe der Elektrisirmaschine und der Mitte des Spiegels zusammenfallen sah. Darauf wurde der heliometrische Apparat so gestellt, daß die Verlängerung seiner Axe die Axe der

Elektrisirmaschine in der Mitte des Spiegels in einen rechten Winkel traf. Vor das eine Fenster des Entladungsapparates wurde nun eine Kerzenflamme gehalten, so daß die Elektroden hell beleuchtet waren. Sodann wurde die Stellung des Entladungsapparates und der Scheibe der Elektrisirmaschine so lange regulirt, und das Ocular der heliometrischen Vorrichtung so weit verstellt, bis man durch dasselbe die Elektroden im Spiegel deutlich sah. Wenn etwa die Axen der beiden Hälften der Objectivlinse noch nicht in derselben Horizontalebene lagen, so daß noch zwei Bilder einer jeden Elektrode erschienen, wurde die bewegliche Hälfte der Linse so lange verschoben, bis diese Bilder vollkommen zusammenfielen. Diese Stellung wurde an der Theilung der Schraubenvorrichtung des heliometrischen Apparates als Nullstellung bemerkt. Durch Beobachtung einzelner Punkte an den Elektroden, an denen das Licht der Kerze besonders hell reflectirt wurde, gelang diese Einstellung sehr sicher auf weniger als  $0,1^{mm}$ . Wurde nun die Elektrisirmaschine in Thätigkeit gesetzt, und gingen Entladungen zwischen den Elektroden des Entladungsapparates über, so erschienen dieselben in dem Fernrohr als einfache, mehr oder weniger leuchtende, nebeneinander liegende horizontale Streifen. Wurde die bewegliche Linsenhälfte des Objectives verschoben, so verschob sich gleichfalls die Hälfte dieser Streifen in verticaler Richtung, und man konnte es leicht dahin bringen, daß die eine Hälfte des einen leuchtenden Streifens mit der Verlängerung der andern Hälfte des folgenden leuchtenden Streifens in einer Horizontallinie zusammenfiel. Diese Stellung blieb, wenn die Entladungen regelmäsig erfolgten, unverändert, obschon beim Rotiren der Scheibe die Streifen selbst auf und nieder oscillirten. Es wurde stets die bewegliche Hälfte des Objectivs einmal aufwärts und sodann abwärts verschoben, bis die erwähnte Coincidenz der aufeinanderfolgenden Streifen eintrat. Die Differenz der Beobachtungen ergab also die *doppelte* Distanz der Streifen.

Das Objectiv des heliometrischen Apparates befand sich in einem Abstand von etwa  $36^{\text{cm}}$  von dem rotirenden Spiegel, die Verbindungslinie der Elektroden bei verschiedenen Versuchen in verschiedenen, meist nahezu  $20^{\text{cm}}$  betragenden Entfernung von demselben.

Um die bei den verschiedenen Stellungen des heliometrischen Apparates und Entladungsapparates beobachteten Entladungsabstände mit einander vergleichen zu können, mußte aus denselben die Zeit berechnet werden, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Entladungen lag. — Es wurde hierzu folgende Einrichtung getroffen:

Auf der Verlängerung der Axe der Elektrisirmaschine war noch ein zweiter kleinerer Spiegel aufgesteckt, der um die Axe gedreht und durch eine seitliche Schraube in jeder Lage festgehalten werden konnte. Unter der Axe lag in einem Abstand von  $253^{\text{mm}}$  von derselben in einer gegen die Axe senkrechten Ebene eine in Millimeter getheilte Scala, die in diesem zweiten Spiegel durch ein etwa  $1\frac{1}{2}^{\text{m}}$  von demselben entferntes Fernrohr beobachtet werden konnte. — Es wurden nun in dem heliometrischen Apparat die Hälften der Objectivlinse in die Nulllage gestellt; es wurde das Ocular entfernt und eine dünne matte Glasplatte eingeschoben, auf welcher etwa in einem Abstand von  $20^{\text{mm}}$  zwei feine horizontale Linien gezogen waren. Die drehbare Scheibe der Elektrisirmaschine wurde darauf so gedreht, daß das Bild der einen von hinten durch eine Kerzenflamme beleuchteten Elektrode durch eine dieser Linien gerade tangirt wurde. Der zweite kleine Spiegel auf der Axe wurde jetzt so gestellt, daß der unter der Axe liegende Nullpunkt der Millimeterscala mit dem Horizontalfaden des auf den Spiegel gerichteten Fernrohres zusammenfiel. Nun wurde die Scheibe der Maschine gedreht, bis das Bild der Elektroden gerade bis zu dem zweiten Horizontalstrich auf der matten Glasplatte der heliometrischen Vorrichtung gewandert war, und wiederum der Scalenthail *s* beobachtet, der mit dem Horizontalfaden des auf den kleinen Spiegel gerichteten Fernrohres

zusammenfiel. — Ist der Abstand der Millimeterscala von dem kleinen Spiegel gleich  $\alpha$ , so ist demnach der Winkel  $\varphi$ , um den die Scheibe der Elektrisirmaschine gedreht werden mußte, um das Bild der Elektroden um den Abstand der beiden Striche auf der matten Glasplatte zu verschieben, durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{s}{\alpha}$$

gegeben. Nun wurde wiederum die Axe der Elektrisirmaschine in der Lage festgestellt, daß das Bild der Elektroden, wie oben, mit dem ersten Strich auf der matten Platte zusammenfiel, und darauf die bewegliche Hälfte der Objectivlinse so lange verschoben, bis das durch diese Hälfte erzeugte Bild mit dem zweiten Strich coïncidirte. Dieser Versuch wurde wiederholt, indem abwechselnd die erste Einstellung an dem obern und untern Strich vorgenommen wurde. Ist hierbei die Verschiebung der verschiebbaren Hälfte der Objectivlinse gleich  $\beta^{\text{mm}}$ , so werden mithin 2 Entladungen, deren Abstand sich im Heliometerapparat gleich  $1^{\text{mm}}$  ergeben hatte, aufeinander gefolgt seyn in einer Zeit, in der sich die Scheibe der Elektrisirmaschine um den Winkel  $\frac{\varphi}{\beta}$  gedreht hatte. Da auch die Umdrehungszahl des Triebwerkes der Scheibe (meist 100 in der Minute), mithin die Umdrehungszahl der Scheibe selbst, 546 in der Minute, bekannt ist, so kann man die zur Umdrehung um den Winkel  $\frac{\varphi}{\beta}$  erforderliche Zeit, d. h. die Zeit zwischen zwei im Abstand von  $1^{\text{mm}}$  beobachteten Entladungen bestimmen.

Um einen Anhaltspunkt für die Kleinheit der Zeiträume zu gewinnen, die die einzelnen Entladungen bei den Versuchen trennen und mit großer Schärfe zu beobachten sind, wollen wir einige Data aus den ersten der folgenden Versuchsreihen aufführen. So betrug u. A. bei mehreren Versuchen:

	$\alpha$	$s$	$\varphi$	$\beta$	$\frac{\varphi}{\beta}$	$z$
I	255	28	3° 8min	7,75	24,3mm	0,000124sec
II	255	35	3° 59min	9,50	25,2mm	0,000128sec

Da bei den bessern Beobachtungen der größte Fehler für  $\beta$  allerhöchstens etwa 0,2<sup>mm</sup> betrug, so kann die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Entladungen bis auf 0,000025 Sec. genau bestimmt werden.

Entladungsabstände, die mehr als 20<sup>mm</sup> im Heliometer betrugen, konnten wegen der Beschränkung des Gesichtsfeldes nicht mehr beobachtet werden.

Kennt man die Menge  $E$  der Elektrizität, welche in der Zeiteinheit von der Holtz'schen Maschine geliefert wird, und die man aus der Ablenkung der Nadel des in den Entladungskreis eingeschalteten Galvanometers berechnen kann; hat man die Zeiteindauer  $t_e$  zwischen zwei Entladungen bestimmt, also die in der Zeiteinheit erfolgende Zahl  $z$  der Entladungen  $z = \frac{1}{t_e}$ , so kann man hieraus die Elektrizitätsmenge  $m$  berechnen, welche bei je einer Entladung zwischen den Elektroden übergeführt wird. Dieselbe ist demnach  $m = E \cdot t_e$ .

Nachdem der Apparat auf diese Weise graduirt war, wurden die einzelnen, zur Erzielung einer Beobachtung erforderlichen Operationen in folgender Reihenfolge vorgenommen.

1) Das Heliometer wurde so eingestellt, daß man das Spiegelbild der Elektroden bei richtiger Stellung des Spiegels deutlich sah; dann wurde 2) der Entladungsapparat mit Gas gefüllt und bis zu dem erforderlichen Drucke evacuiert. 3) Dieser Druck wurde mittelst des Kathetometers abgelesen. 4) Der Entladungsapparat wurde mit der im richtigen Takt in Thätigkeit gesetzten Elektrisirmaschine verbunden und der Entladungsabstand am Heliometer abgelesen. 5) Darauf wurde am Galvanometer die Nulllage des Magnets bestimmt; sodann dasselbe in den Schließungskreis an Stelle des Entladungsapparates eingefügt, und unter genauer Einhaltung des durch den Metro-

nom angegebenen Tempos der Drehung der Scheibe an der Elektrisirmaschine die Intensität des Stromes am Galvanometer abgelesen. 6) Schließlich wurde noch einmal der Druck controlirt.

Die sämtlichen Beobachtungen mußten der großen Lichtschwäche der Entladungsbilder wegen im absolut dunkeln Raum vorgenommen werden; dieselben ermüdeten die Augen in hohem Grade. Die Untersuchungen wurden angestellt:

- 1) über den Einfluß der Intensität der Elektrizitätsquelle;
- 2) über den Einfluß des Druckes der Gase, der Natur derselben, sowie der Materie der Elektroden;
- 3) über den Einfluß der Größe; des Abstandes und der Ableitung der Elektroden auf die Entladung.

§. 3. Einfluß der Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe der Elektrisirmaschine und der Menge der in der Zeiteinheit erzeugten Elektrizität auf den Abstand der Entladungen.

a) Bei verschiedenen, im Folgenden zu erwähnenden Versuchsreihen wurde der Abstand der Entladungen gemessen, während die Scheibe der Maschine schneller oder langsamer in Bewegung gesetzt wurde, die Triebsscheibe sich z. B. 60 bis 100 mal in der Minute drehte. Dabei blieb unter sonst gleichen Umständen der Abstand  $\beta$  der Entladungen ganz ungeändert. Es ist dies ein Beweis dafür, *daß die bei der Drehung der Scheibe der Elektrisirmaschine um einen gegebenen Winkel  $\varphi$  erzeugte Elektrizitätsmenge innerhalb der Grenzen der Beobachtungen von der Drehungsgeschwindigkeit der Scheibe unabhängig ist.*

Unter den verschiedenen Umständen, oder bei größerer oder geringerer Entfernung der rotirenden und festen Scheibe der Holtz'schen Maschine voneinander, zeigt das in den Entladungskreis der Maschine eingeschaltete Galvanometer bei gleicher Drehungsgeschwindigkeit der rotirenden Scheibe verschieden starke Ablenkungen; die

in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt der Leitung fließenden Elektrizitätsmengen sind also verschieden. Dann sind die Abstände der einzelnen Entladungen, unter sonst gleichen Verhältnissen, der durch das Galvanometer gemessenen Intensität des Stromes umgekehrt proportional: *Die Elektrizitätsmengen, welche bei jeder Entladung zwischen den Elektroden übergeführt werden, sind demnach, bei sonst gleichen Verhältnissen, bei gleichem Druck und gleichem Abstand der unverändert gebliebenen Elektroden stets dieselben.* — Dies zeigen unter andern auch folgende Versuche:

Zwei kleine Platinkugeln von 3,5<sup>mm</sup> Durchmesser im Abstände von 9,2<sup>mm</sup> in trockner Luft.

Druck	Intensität $I$	Abstand $A$ der Entladungen	$A \cdot I$
29,8	30	9,7	290
30,3	29,5	10,0	295
31,1	25	12,0	300
31,3	33	8,9	294
31,7	32	9,5	304
31,9	40	7,5	300
32,4	30	10,0	300
32,7	24,5	12,7	311

Man kann also aus den bei einer Intensität  $I_1$  beobachteten Entladungsabständen  $A_1$ , die bei der Intensität  $I_0$  sich ergebenden Abstände  $A_0$  direkt nach der Formel  $A_0 = \frac{I_1}{I_0} A_1$  berechnen.

§. 4. Einfluss des Druckes, der Natur der Gase und der Elektroden auf die Entladungen.

Direct gesehen bieten die zwischen den Elektroden des Entladungsapparates im luftverdünnten Raum übergehenden Entladungen die im Allgemeinen bekannten Erscheinungen dar. Sind die beiden Elektroden zunächst gleich groß und beide in gleicher Weise mit den Käm-



men der Holtz'schen Maschine verbunden, so geht die Entladung in Gestalt eines röthlich leuchtenden Konoids von der vordern Fläche der positiven Elektrode aus zu der negativen Elektrode hin. Je kleiner der Druck ist, desto gröfser wird die Stelle der Elektrode, welche als Ausgangspunkt der leuchtenden Entladung dient, desto mehr verbreitert sich dieselbe gegen die negative Elektrode, von der sie durch einen ganz dunklen Raum getrennt ist.

Bei höheren Drucken erscheint die positive Entladung nur wie eine feine Lichtlinie; der dunkle Raum wird kleiner mit wachsendem Druck. Die negative Elektrode ist, wenn ihr Durchmesser klein ist, bei sehr geringen Drucken ganz von blauem Glimmlicht bedeckt, welches aus zwei durch einen dunklern Raum getrennten Schichten besteht. Dasselbe zieht sich bei stärkern Drucken immer mehr gegen die vordere Fläche der Elektrode zusammen, besitzt dasselbst aber stets eine gröfsere Ausbreitung, als die positive Entladung an der positiven Elektrode. Bei niederen Drucken zeigt schon der directe Anblick der Entladungen, besser noch die Zerlegung ihres Lichtes durch einen Spectralapparat, dafs nur das Gas selbst an der Entladung Theil nimmt; die leuchtenden Linien der glühenden Metalle der Elektroden treten nicht auf.

Beim Stickstoff und der Luft, wo das blaue Glimmlicht sehr bedeutend von der röthlich leuchtenden, positiven Entladung durch die äufsere Farbenerscheinung unterschieden ist, zeigt sich bei letzterer das volle Stickstoffspectrum zweiter Ordnung (Wellenspectrum), während das Glimmlicht nur 3 Linien zeigt, welche zwar nicht mit den hellsten Linien des gewöhnlichen Stickstoffspectrums übereinstimmen, indess doch in demselben ebenfalls sich vorfinden. Es scheint dieß nur ein neuer Beweis für die vielfach bestätigte Erfahrung zu seyn, dafs die Gase an der positiven und negativen Elektrode verschieden hohe Temperaturen annehmen, da es bekannt ist, dafs mit abnehmender Temperatur einzelne helle Linien des Spectrums schneller an Intensität verlieren als andere. Ein directer

Einfluß der verschiedenen Elektricitäten auf die Farbe des leuchtenden Gases braucht nicht angenommen zu werden.

Betrachtet man die Gesamtentladung in dem rotirenden Spiegel, so ergibt sich, daß mit abnehmendem Druck die Abstände der einzelnen Entladungen kleiner werden. Indefs erfolgte *schon bei den geringsten Drucken*, welche verwendet wurden ( $\frac{1}{2}$  bis  $\frac{1}{4}$  mm), die Ueberführung der continuirlich entwickelten Elektricität der Holtz'schen Maschine zwischen den Elektroden stets durch einzelne *discontinuirliche Entladungen*. — Die einzelnen Bilder der zwischen den Elektroden übergehenden Entladungen sind ganz scharf und einfach, durch dunkle Zwischenräume von einander getrennt; sie erscheinen nicht breiter als die Entladung selbst und sind nicht von kleineren Partialentladungen begleitet. Bei etwas höheren Drucken (5<sup>mm</sup> und mehr) zeigen sie sich als ganz scharf gezeichnete Lichtlinien. Nur das Bild des Glimmlichtes an der negativen Elektrode erscheint bei sehr schwachen Drucken in der Richtung der Drehung zuweilen ein wenig verlängert, ohne daß indess die einzelnen Bilder einander berühren. Es dauert dann also an der negativen Elektrode die mit Glimmlicht übergehende Entladung etwas länger an, als die von der positiven Elektrode ausgehende Entladung. Hiernach *finden in den vorliegenden Fällen continuirliche elektrische Entladungen im luftverdünnten Raum nicht statt*, und zur Erzeugung jeder solcher Entladung ist eine bestimmte endliche Spannungsdifferenz erforderlich.

a) Einfluß des Druckes der Gase.

Die folgenden Tabellen enthalten einige Messungen über den Einfluß des Druckes der Gase auf die Abstände der einzelnen Entladungen. In denselben bezeichnet  $p$  den jedesmal am Manometer abgelesenen Druck,  $y$  den am Heliometer beobachteten doppelten Abstand zweier Entladungsbilder,  $J$  die am Galvanometer abgelesene Intensität des Elektricitätsstromes. Es wurden entweder die beiden Elektroden isolirt mit den Zuleitern der Holtz'-

schen Maschine verbunden, oder die eine derselben noch außerdem durch einen Kupferdraht zur Gasleitung des Zimmers abgeleitet. Die den Beobachtungsreihen beige-fügten, durch den einen von uns (R. Rühlmann) be-rechneten Werthe der Abstände  $y$  der Entladungen sind aus der nach mehrfachen Versuchen von ihm als geeignet erfundenen Formel:

$$y = A + Bp - Cp^{-2}$$

abgeleitet, bei welcher die Summe der Fehlerquadrate sich kleiner ergab, als bei andern ähnlichen Formeln, wie  $y = A + Bp + Cp^2$ , oder  $y = A + Bp - \frac{C}{p}$  u. s. f.

Diese Formel mußte den Bedingungen entsprechen, daß bei Annäherung des Druckes an Null die Abstände der Entladungen schnell abnehmen, bei höhern Drucken da-gegen immer mehr den Drucken proportional wachsen. Bei der Berechnung der Constanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  wurden die-jenigen Beobachtungen unberücksichtigt gelassen, welche sichtlich größere Fehler enthielten.

Reihe I und II. Trockne und kohlenstofffreie atmo-sphärische Luft. Elektroden zwei kleine, nahezu gleiche Messingkugeln von resp.  $B$ ) 3,08<sup>mm</sup> und  $A$ ) 2,92<sup>mm</sup> Durch-messer. Abstand der vordersten Punkte der Elektroden 9,95<sup>mm</sup>. Das Galvanometer ist nur bei diesen Reihen (nicht bei den folgenden) dauernd mit dem Entladungs-apparat in den Schließungskreis eingeschaltet. Ein Scalentheil des Heliometers entspricht einem Zeitintervall von 0,00017 Sekunden.

## Reihe I. Elektrode A positiv, Elektrode B negativ.

## Reihe I.

Druck $p$ in mm Quecksilber	Entfernung $y$ zweiter Ent- ladungsbild., gemessen am Heliometer	Intensität $J$ beobachtet am Galvano- meter	Entfernung zweiter Ent- ladungsbild., reducirt auf d. Intensit. 43	Berechneter Werth nach der Interpo- lationsformel	Abweichung
11,9	2,4	44	2,5	2,6	- 0,1
16,2	3,6	44	3,7	3,7	$\pm$ 0,0
19,4	3,9	44	4,0	4,2	- 0,2
25,4	4,5	44	4,6	4,9	- 0,3
32,3	5,4	44	5,5	5,6	- 0,1
35,4	5,7	44,5	5,8	5,9	- 0,1
39,1	6,0	45	6,2	6,2	$\pm$ 0,0
43,4	6,4	45	6,6	6,5	+ 0,1
49,8	6,9	44	7,1	7,0	+ 0,1
54,9	7,2	44,3	7,4	7,5	- 0,1
61,1	7,7	45	8,0	7,8	+ 0,2
65,8	8,1	45,5	8,4	8,2	+ 0,2
71,4	8,7	44	8,9	8,6	+ 0,3
82,4	9,1	44	9,3	9,3	$\pm$ 0,0
84,6	9,6	44	9,8	9,5	+ 0,3
94,6	10,0	44	10,2	10,2	$\pm$ 0,0
99,2	10,3	44	10,5	10,5	$\pm$ 0,0
104,7	10,4	44	10,6	10,9	- 0,3
108,2	11,4	42,2	11,2	11,1	+ 0,1
112,3	11,9	40	11,7	11,4	+ 0,3
122,5	12,3	42,2	12,1	12,1	$\pm$ 0,0
129,5	13,2	41,5	12,4	12,6	- 0,2
135,8	13,7	41,5	12,9	13,1	- 0,2
145,1	14,4	42	13,5	13,7	- 0,2

## Reihe II. Elektrode B positiv, Elektrode A negativ.

## Reihe II.

Druck $p$ in mm Quecksilber	Entfernung $y$ zweiter Ent- ladungsbild., gemessen am Heliometer	Intensität $J$ beobachtet am Galvano- meter	Entfernung zweiter Ent- ladungsbild., reducirt auf d. Intensit. 43	Berechneter Werth nach der Interpo- lationsformel	Abweichung
13,4	2,0	43	2,0	1,7	+ 0,3
17,3	3,2	43	3,2	3,0	+ 0,2
24,1	3,6	43	3,6	4,2	- 0,6
28,1	4,5	43	4,5	4,7	- 0,2
29,5	4,9	43,5	4,9	4,9	$\pm$ 0,0
32,1	4,8	43	4,8	5,2	- 0,4
32,4	5,3	43	5,3	5,2	+ 0,1

Druck $p$ in mm Quecksilber	Entfernung $y$ zweiter Ent- ladungsbild., gemessen am Heliometer	Intensität $J$ beobachtet am Galvano- meter	Entfernung zweiter Ent- ladungsbild., reducirt auf d. Intensit. 43	Berechneter Werth nach der Interpo- lationsformel	Abweichung
37,9	5,9	43,3	5,9	5,8	+ 0,1
41,1	6,4	43,5	6,4	6,1	+ 0,3
43,0	6,6	43	6,6	6,3	+ 0,3
46,5	6,8	43	6,8	6,7	+ 0,1
51,0	7,1	43,5	7,1	7,1	$\pm$ 0,0
52,3	7,4	43	7,4	7,2	+ 0,2
55,4	7,2	42,5	7,2	7,5	$\pm$ 0,3
60,3	8,0	43	8,0	8,0	$\pm$ 0,0
67,7	8,4	43	8,4	8,6	$\pm$ 0,2
74,6	8,6	43	8,6	9,2	$\pm$ 0,6
92,2	10,8	44	11,0	10,8	+ 0,2
102,0	11,7	43	11,7	11,7	$\pm$ 0,0
115,5	13,0	43	13,0	12,9	+ 0,1

Die zur Berechnung der Beobachtungen angewendeten Interpolationsformeln waren:

$$I) y = 3,70 + 0,0687 p - 282,6 p^{-2}$$

$$II) y = 2,78 + 0,0875 p - 404,7 p^{-2}$$

Reihe III und IV. Trockne und kohlenstofffreie atmosphärische Luft. Elektroden zwei grössere polirte Messingkugeln von resp. A) 14,3 und B) 13,9<sup>mm</sup> Durchmesser. Abstand ihrer vordersten Punkte 11,78<sup>mm</sup>.

#### Reihe III und IV.

Druck $p$ in mm Quecksilber	Entfernung $y$ zweiter Ent- ladungsbild., gemessen am Heliometer	Intensität $J$ beobachtet am Galvano- meter	Entfernung zweiter Ent- ladungsbild., reducirt auf d. Intensit. 40	Berechneter Werth nach der Interpo- lationsformel	Abweichung
III.					
Größere Elektrodenkugel positiv, kleinere negativ.					
6,4	3,4	34	3,0	3,0	$\pm$ 0,0
10,0	6,1	35	5,4	4,9	+ 0,5
12,8	6,6	35,5	5,9	5,7	+ 0,2
15,8	7,2	35	6,4	6,5	$\pm$ 0,1
20,9	8,7	36	7,7	7,7	$\pm$ 0,0
23,2	9,5	36	8,6	8,3	+ 0,3
28,0	10,1	36	9,1	9,2	$\pm$ 0,1

Druck $p$ in $\text{mm}$ Quecksilber	Entfernung $y$ zweiter Ent- ladungsbild., gemessen am Heliometer	Intensität $J$ beobachtet am Galvano- meter	Entfernung zweiter Ent- ladungsbild., reducirt auf d. Intensit. 40	Berechneter Werth nach der Interpo- lationsformel	Abweichung
34,9	11,6	37	10,6	10,6	$\pm 0,0$
39,5	12,5	36	11,4	11,6	$- 0,2$
44,3	13,2	36,5	12,2	12,6	$- 0,4$
48,6	14,6	37	13,5	13,6	$- 0,1$
54,7	15,9	36,5	14,7	14,7	$\pm 0,0$
60,4	17,1	37,5	16,0	15,9	$+ 0,1$
66,0	18,5	38	17,4	17,1	$+ 0,3$
71,7	18,8	39	17,9	18,2	$- 0,3$

## IV.

Größere Elektrodenkugel negativ, kleinere positiv.

8,2	4,3	39,5	4,2	4,1	$+ 0,1$
11,3	5,4	39	5,3	5,6	$- 0,3$
15,6	6,8	39,5	6,7	7,4	$- 0,7$
19,9	8,0	43	8,6	8,9	$- 0,3$
22,5	9,8	40	9,8	9,6	$+ 0,2$
24,2	9,0	44	9,9	10,1	$- 0,2$
26,9	9,7	44	10,7	10,7	$\pm 0,0$
29,6	10,6	45	11,8	11,4	$+ 0,4$
30,3	11,5	41	11,7	11,6	$+ 0,1$
32,9	10,9	45	12,1	12,1	$\pm 0,0$
36,3	11,7	45	13,0	13,0	$\pm 0,0$
39,5	13,6	39	13,5	13,6	$- 0,1$
40,4	12,5	45	13,9	13,9	$\pm 0,0$
46,7	15,0	41,5	15,6	15,3	$+ 0,3$
50,8	15,4	40,5	15,7	16,1	$- 0,4$
55,5	16,7	42	17,2	17,2	$\pm 0,0$
56,1	16,6	42,5	17,4	17,4	$\pm 0,0$
60,2	17,7	43	19,0	18,3	$\pm 0,7$
68,1	18,4	43	19,8	20,1	$- 0,3$

Ein Scalentheil entspricht  $0,00018$  Sec. Die Interpolationsformeln sind für

$$\text{Reihe III. } y = 4,20 + 0,245 p - 138,9 p^{-2}$$

$$\text{„ IV. } g = 4,04 + 0,1652 p - 146,0 p^{-2}.$$

Reihe V und VI. Apparat wie bei Reihe II. Abstand der vordersten Punkte der Kugeln  $9,45^{\text{mm}}$ . Ein Scalentheil des Heliometers entspricht  $0,00018$  Sekunden.

## Reihe V und VI.

Druck $p$ in $\text{mm}$ Quecksilber	Entfernung $y$ zweiter Ent- ladungsbild., gemessen am Heliummeter	Intensität $J$ , beobachtet am Galvano- meter	Entfernung zweiter Ent- ladungsbild., reducirt auf Intensität 40	Berechneter Werth nach der Interpo- lationsformel	Abweichung
V.					
Größere Elektrode positiv, kleinere negativ.					
8,3	5,3	35	4,7	4,2	+ 0,5
11,3	6,1	35	5,5	5,9	- 0,4
16,3	7,0	36	6,3	7,4	- 1,1
21,3	8,5	37	7,9	9,0	- 1,1
26,4	9,9	37	9,2	10,3	- 1,1
30,4	13,3	36	12,3	11,5	+ 0,8
33,5	15,0	36	13,6	12,3	+ 1,3
38,2	15,6	36	14,4	13,5	+ 0,9
42,9	16,1	37	14,9	14,6	+ 0,3
48,3	17,1	37	15,8	16,0	- 0,2
54,3	18,0	36,5	17,1	17,5	- 0,4
61,2	20,1	38,5	19,1	19,2	- 0,1
66,7	21,1	38	20,0	20,5	- 0,5
71,4	22,8	38	21,6	21,6	$\pm 0,0$

## VI.

Größere Elektrode negativ, kleinere positiv.					
8,3	3,8	37	3,5	3,3	+ 0,2
18,6	6,7	36,5	6,2	6,6	- 0,4
22,7	8,4	36,5	7,6	7,5	+ 0,1
27,8	9,1	37,5	8,5	8,5	$\pm 0,0$
31,2	9,8	37	9,1	9,1	$\pm 0,0$
37,2	11,0	36	10,2	10,1	+ 0,1
40,7	11,3	36	10,5	10,7	- 0,2
46,3	12,0	37	11,3	11,6	- 0,3
50,7	13,2	38	12,3	12,3	$\pm 0,0$
57,5	14,3	38	13,3	13,5	- 0,2
64,1	16,1	38	15,0	14,5	+ 0,5
68,8	16,5	38	15,4	15,4	$\pm 0,0$

Die Interpolationsformeln sind für

$$\text{Reihe V : } y = 3,45 + 0,2062 p - 76,2 \cdot p^{-2}$$

$$\text{„ VI : } y = 5,09 + 0,2219 p - 217,1 \cdot p^{-2},$$

Reihe VII und VIII. Die Elektroden sind zwei ungleich große Messingkugeln von resp. A) 14,35 und B) 9,15<sup>mm</sup> Durchmesser. Abstand ihrer vordersten Punkte 4,55<sup>mm</sup>.



Ein Scalenthail des Heliometers entspricht 0,00018 Secunden. Nur wenn die gröfsere Kugel als positive, die kleinere als negative Elektrode dient, erhält man sichere Resultate, im umgekehrten Falle werden die Entladungen sehr unregelmäfsig.

## Reihe VII und VIII.

Druck $p$ in mm Quecksilber	Entfernung $y$ zweier Ent- ladungsbild., gemessen am Heliometer	Intensität $J$ , beobachtet am Galvano- meter	Entfernung zweier Ent- ladungsbild., reducirt auf Intensität 40	Berechneter Werth nach der Interpo- lationsformel	Abweichung
VII.					
Größere Elektrode positiv, kleinere negativ.					
11,9	3,1	43	3,3	2,2	+ 1,1
15,0	3,8	43,5	4,2	3,7	+ 0,5
17,1	4,0	44	4,4	4,3	+ 0,1
20,0	4,3	44	4,7	5,0	- 0,3
24,7	5,2	44	5,7	6,0	- 0,3
25,8	5,2	44	5,7	6,3	- 0,6
29,7	6,3	44	6,9	7,1	- 0,2
32,8	7,1	43	7,8	7,7	+ 0,1
37,2	7,8	44	8,4	8,4	$\pm$ 0,0
41,2	8,4	43,5	9,2	9,1	+ 0,1
46,4	9,6	43	10,4	10,0	+ 0,4
51,1	9,9	43	10,6	10,7	- 0,1
54,7	10,5	42,5	12,2	11,3	+ 0,9
59,3	11,2	43,5	12,2	12,0	+ 0,2
63,5	11,6	45	13,0	12,7	+ 0,3
67,1	11,6	44	12,8	13,2	- 0,4
79,4	13,1	43	14,4	15,1	- 0,7
VIII.					
Größere Elektrode negativ, kleinere positiv.					
18,6	4,6	39,5	4,5		
21,5	5,2	39,5	5,1		
24,5	6,1	40	6,1		
28,1	7,0	40	7,0		
30,8	9,4	42	9,8		
35,2	10,3	42,5	10,9		
39,9	11,5	44	12,6		
41,9	10,0	44	11,0		

Für die erste dieser Reihen ist die Interpolationsformel:

$$\text{Reihe VII } p = 2,89 + 0,1543 \cdot p - 348,8 p^{-2}.$$

Einige der in den einzelnen Reihen enthaltenen Resultate sind in Fig. I Taf. III graphisch dargestellt. Die Abscissen bezeichnen den Druck, die Ordinaten die beobachteten Abstände der Entladungen. Die einzelnen Curven sind mit der Zahl der Beobachtungsreihe bezeichnet. Die nähere Betrachtung dieser Curven ergibt, daß bei gleicher Zufuhr der Elektricität zu den Elektroden die Abstände der einzelnen Entladungen, also die zur Erzeugung einer Entladung erforderlichen Elektricitätsmengen mit steigenden Drucken zunehmen. Dieses Zunehmen findet von den niedersten Drucken an erst schnell, dann wieder langsamer statt; bei etwas höhern Drucken vergrößern sich die Entladungsabstände nahezu proportional dem Ansteigen des Druckes. Dasselbe Gesetz folgt auch aus den später zu erwähnenden Versuchen über die Entladungen in verschiedenen Gasen. Es behält auch seine Gültigkeit beim Ableiten der einen der beiden Elektroden zur Erde.

(Schluß im nächsten Hefte.)

**V. Zur Theorie des Polaristrobometers und des drehenden Nicols;**  
**von H. G. van de Sande Bakhuyzen,**

Prof. d. Physik am Polytechnicum zu Delft.

Jedem, der mit dem Polaristrobometer von Wild Beobachtungen angestellt hat, ist es bekannt, daß die Unterschiede der Ablesungen in den vier Quadranten niemals genau gleich  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  oder  $270^\circ$  sind, und auch die abgelesenen Drehungen der Polarisationssebene meistens Differenzen von mehreren Minuten zeigen, welche nicht Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können. Bei den genauen Bestimmungen der Drehungsconstante des Zuckers von Wild in seiner Abhandlung „über ein neues Polaristro-

bometer und eine neue Bestimmung der Drehungsconstante des Zuckers, Bern 1865. S. 48 seq.“ betragen diese Unterschiede sogar bis 20'.

Zur Erklärung sagt Wild S. 49: „Es ist dies unzweifelhaft dem Umstande zuzuschreiben, daß das Verschwinden der Farbfransen durchweg nicht in einem verticalen, sondern in einem gegen die horizontalen Franssen etwas geneigten Querstreif erfolgt, und daß ich dann in der Regel das Verschwinden der Franssen nicht am Kreuzungspunkt der Faden, sondern in dem obern von denselben gebildeten spitzen Winkelfelde beobachtete. Das Mittel aus diesen verschiedenen Winkeln muß indessen den richtigen Drehungswinkel geben.“ Diese Erklärung kann nicht sehr befriedigend genannt werden, denn beobachtet man in allen Quadranten das Verschwinden an der nämlichen Stelle in dem obern Winkelfelde, so ist a priori kein Grund anzugeben, warum die Differenz der Ableesungen nicht genau  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  oder  $270^\circ$  betragen sollte; beobachtet man dagegen in den verschiedenen Quadranten das Verschwinden an verschiedenen Stellen des Sehfeldes, so ist es gar nicht gerechtfertigt, das Mittel der Beobachtungen als den richtigen Werth des Drehungswinkels anzusehen.

Da bei meinen Messungen mit dem Polaristrobometer, trotz aller Sorgfalt, genau das Verschwinden der Franssen in der Mitte des Feldes zu beobachten, auch die genannten Unterschiede mit großer Constanz hervortraten, meinte ich die Wild'sche Erklärung nicht als die richtige ansehen zu müssen, und es schien mir wünschenswerth bei der großen Genauigkeit der Bestimmungen, welche mit dem vorzüglichen Instrumente zu erreichen ist, die Ursache dieser Fehler streng zu untersuchen. Sie kann gelegen seyn: 1) in dem vertheilten Kreise, 2) in der Construction und Aufstellung des drehbaren Nicols, 3) in den Kalkspathplatten des Savart'schen Polariscope.

Um Theilung und Excentricität des Kreises zu untersuchen, brachte ich einen zweiten Nonius diametral gegen-

über dem ersten an, und las beide in verschiedenen Ständen ab. Das Resultat war, daß die Theilungs- und Excentricitätsfehler bei meinem Instrumente kaum eine Minute betrogen. So blieb mir daher nichts anderes übrig, als durch Rechnung den Einfluß zu bestimmen von etwaigen Fehlern, welche in den beiden andern Theilen des Instrumentes vorkommen konnten, und diese mit den beobachteten Differenzen zu vergleichen. In wie weit es auf diesem Wege gelang, befriedigende Resultate zu erhalten, möge aus dem Folgenden hervorgehen.

#### Fehler des drehenden Nicols.

Der Forderung, daß die Drehung des Nicol'schen Prismas wirklich gleich sey der Drehung der Polarisations-ebene des austretenden Strahles, wird nur Genüge gethan, wenn:

- 1) Drehungsaxe und austretender Strahl zusammenfallen,
- 2) beide in dem Hauptschnitte der hinteren Hälfte des Nicols gelegen sind.

Im allgemeinen wird aber in dieser Hinsicht das Prisma mit Fehlern behaftet seyn, deren Einfluß wir im folgenden berechnen.

Sey Fig. I der Durchschnitt einer Kugeloberfläche mit Flächen und Linien, welche resp. parallel dem Hauptschnitte, der optischen Axe usw. durch den Mittelpunkt der Kugel gebracht sind, und seyen, wenn wir die Flächen und Linien statt ihre Durchschnitte setzen:

$Z$  die Drehungsaxe,

$S$  der austretende Strahl,

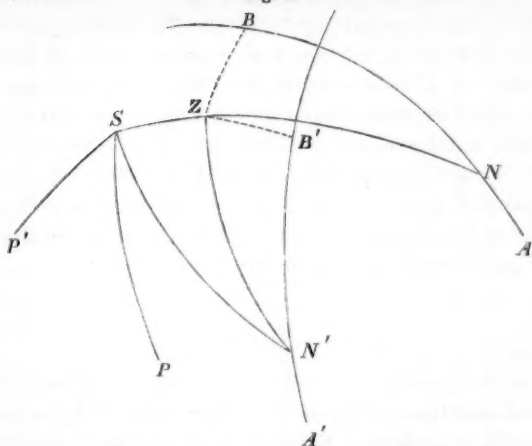
$A$  und  $A'$  die optische Axe der hintern Hälfte des Nicols,

$N$  und  $N'$  die Normale der Austrittsfläche,

$ANB$  und  $A'N'B'$  der Hauptschnitt,

$ZB$  und  $Z'B'$  ein senkrechter Bogen aus  $Z$  auf  $ANB$  oder  $A'N'B'$  niedergelassen.

Fig. 1.



Die Buchstaben ohne Accent beziehen sich auf den besonderen Stand des Nicols, wobei die Normale der Austrittsfläche mit Drehungsaxe und Strahl in einer Fläche liegen; die Buchstaben mit Accent beziehen sich auf einen willkürlichen Stand des Nicols.

Sey ferner:

$$NB = N'B' = p,$$

$$ZB = Z'B' = \chi,$$

$$ZS = \psi$$

und die Drehung des Nicols:

$$N'ZN = \alpha,$$

worin  $\chi$  und  $\psi$  kleine Größen sind, wovon nur die erste und zweite Potenz in Rechnung gebracht werden.

Man hat dann sofort für die Einfallswinkel:

$$SN = p + \psi + \frac{\chi^2}{2 \operatorname{tg} p} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$SN' = p + \psi \cos \alpha + \frac{1}{2 \operatorname{tg} p} (\psi^2 \sin^2 \alpha + \chi^2) \quad (2)$$

und für die Azimuthe der Einfallsebenen in Beziehung zu den Hauptschnitten:

$$SNB = \frac{\chi}{\sin p} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$SN'B' = \frac{\chi}{\sin p} + \psi \frac{\sin \alpha}{\sin p} - \psi^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos p}{\sin^2 p} \quad (4).$$

Jetzt muß bestimmt werden, welche die Polarisationssebenen des Strahles  $S$  sind, falls der Hauptschnitt  $ANB$  oder  $A'N'B'$  ist. Wir bedienen uns dabei der Formeln, welche Neumann in Bd. 42 dieser Annalen S. 8 für die Intensitäten der durchgelassenen und reflectirten Strahlen bei einem doppelt brechenden Medium mit einer Axe gegeben hat, und deren Richtigkeit durch experimentelle Untersuchungen von Neumann, Wild u. a., wenigstens so weit die Wahrnehmungsfehler es gestatten, zur Genüge bewiesen ist.

Sey  $\varphi$  der Einfallswinkel eines Strahles in der Luft,  $\varphi$ , und  $q$ , die Brechungswinkel des ordinären und extraordinären Strahles,  $\beta$  der Azimuth des einfallenden Strahles in Beziehung zum Hauptschnitte des Krystalls,  $\nu$  der Winkel zwischen der optischen Axe und der Normalen zur brechenden Oberfläche, dann ist der Azimuth der Polarisationssebene des einfallenden Strahles, wenn nur der extraordinäre Strahl durchgeht, also die Intensität des ordinären Strahles gleich Null ist, gegeben durch folgende Formel, worin  $90 - A$  der Winkel zwischen Polarisationssebene und Einfallsebene ist:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin \nu \sin (\varphi + q) \sin \beta}{\cos \nu \cos q \cdot \sin^2 q - \sin \nu \sin q \cdot \cos \beta \cos^2 q + \cos \nu \sin q \cdot \sin q \cos q - \sin \nu \cos q \cdot \cos \beta \sin q \cos q} \quad (5).$$

Bei dem Nicol'schen Prisma ist dann auch  $90 - A$  der Winkel zwischen Polarisationssebene und Austrittsebene des austretenden polarisirten Strahles, da in diesem Falle im Krystall auch die Intensität des ordinären Strahles gleich Null ist.

In dieser Formel müssen jetzt noch  $q$ . und  $q$ . in  $q$  und andere constante Größen übergeführt werden.

Sey  $\frac{1}{\mu}$  der Brechungsindex des ordinären,  $\frac{1}{\pi}$  der Brechungsindex des extraordinären Strahles senkrecht zur Axe, dann ist:

$$\sin q_0 = \mu \sin q \dots \dots \dots (6)$$

und

$$\sin^2 q_0 = \sin^2 q [\pi^2 + (\mu^2 - \pi^2) (\cos v \cos q_0 + \sin v \sin q_0 \cos \beta)^2] \dots \dots (7).$$

Eine Formel, wodurch unmittelbar  $q_0$  in  $q$  und bekannte Größen umgewandelt wird, und welche daher nach Substitution in den Werth von  $\tan A$ , auch  $A$  explicite in bekannten Größen kennen lehrt, kann hieraus nicht abgeleitet werden. Wir können uns jedoch mit Näherungsformeln begnügen, und dadurch die Sache vereinfachen. Wenn man die Formeln (5) und (7) anwendet, auf den Fall durch Fig. I vorgestellt, so wird:

$$SN \text{ oder } S'N' = q$$

$$AN \text{ „ } A'N' = v$$

$$SNB \text{ „ } S'N'B' = \beta.$$

Da ferner  $q$  und  $\chi$  kleine Größen sind, ist auch  $\beta$  eine kleine Größe der ersten Ordnung, und ebenso, wie Formel (5) zeigt,  $\tan A$ . Berechnet man dann  $\tan A$  bis kleine Größen der zweiten Ordnung, so daß die der dritten und höheren Ordnung nicht mehr aufgenommen werden, so genügt es,  $q$ , bis auf Größen der ersten Ordnung zu bestimmen. In Formel (7) darf man daher  $\cos \beta$  gleich 1 setzen, und bekommt dann nach einigen Reductionen:



$$\sin^2 q = \frac{M \sin^2 q + NP \sin^4 q + 2P \sin^2 q \sin \nu \cos^2 \nu (M - \mu^2 \pi^2 \sin^2 q)}{(1 + P \sin^2 q)^2 - 4P \sin^2 \nu \sin^2 q},$$

worin:

$$M = \mu^2 \cos^2 \nu + \pi^2 \sin^2 \nu,$$

$$N = \mu^2 \cos^2 \nu - \pi^2 \sin^2 \nu,$$

$$P = \mu^2 - \pi^2.$$

Dieser Werth von  $q$ . in (5) substituirt giebt für  $A$  eine schwierig zu behandelnde Form; wir werden daher auf eine andere Art verfahren, indem wir für  $\mu$ ,  $\nu$  und  $\pi$  ihre numerischen Werthe setzen. Nach Rudberg sind für den Streifen  $D$ :

$$\frac{1}{\mu} = 1,65850, \quad \frac{1}{\pi} = 1,48635.$$

Die stumpfen Winkel des Kalkspathrhomboëders, woraus das Nicol geschnitten ist, werden gleich  $105^\circ 5'$  angenommen, dann ist der Winkel zwischen der optischen Axe und den stumpfen Rhomboëderkanten  $63^\circ 44' 55''$ . Bei Bearbeitung des Prismas wird aber die Aus- und Eintrittsfläche unter einem Winkel von ungefähr  $68^\circ$  zu den stumpfen Kanten abgeschliffen, so daß dann die Normale und die optische Axe einen Winkel von ungefähr  $41^\circ 45'$  mit einander bilden. Nehmen wir an, daß bei dem fraglichen Nicol'schen Prisma der Winkel von Austrittsfläche und stumpfer Kante genau gleich  $68^\circ$  ist, so ist  $\nu$  gleich  $41^\circ 44' 50''$ . Von diesen Werthen von  $\mu$ ,  $\pi$  und  $\nu$  ausgehend, findet man:

$$\sin^2 q = \frac{0,40306 + 0,05620 \sin q}{1 - 0,02019 \sin^2 q + 0,00794 \sin^4 q} \frac{1(1 - 0,40829 \sin^2 q) - 0,00015 \sin^2 q}{\sin^2 q} \quad (8).$$

Bei dem Nicol wird der austretende Strahl, dessen man sich bei den Messungen bedient, ungefähr mit den stumpfen Kanten des Rhomboëders oder den Längskanten des Prismas parallel, und daher der Winkel  $q$  zwischen Strahl und Normale wenig von  $22^\circ$  verschieden seyn. Sey deshalb  $\Phi = 22^\circ$  und  $q = \Phi + \Delta q$ , worin  $\Delta q$  eine kleine GröÙe der ersten Ordnung ist, und nennen wir die bei  $\Phi$  gehörigen Werthe der Brechungswinkel des ordinären und extraordinären Strahles  $\Phi_o$  und  $\Phi_e$ , die bei  $q$  gehörige  $q_o = \Phi_o + \Delta q_o$  und  $q_e = \Phi_e + \Delta q_e$ , dann folgt nach einigen Reductionen und Berechnungen mit Aufnahme der GröÙen erster Ordnung aus Formel (8):

$$q_e = \Phi_e + \Delta q_e = 14^\circ 7' 44'' + 0,639 \Delta q,$$

und aus Formel (6):

$$q_o = \Phi_o + \Delta q_o = 13^\circ 3' 15'' + 0,5740 \Delta q.$$

Bringen wir diese Werthe von  $q_o$  und  $q_e$ , sowie auch den Werth von  $\nu$  gleich  $41^\circ 44' 50''$  in die Formel (5), dann wird  $\operatorname{tg} A$  ausgedrückt durch bekannte GröÙen und die kleinen GröÙen erster Ordnung  $\Delta q$  und  $\beta$ . Mit Aufnahme GröÙen zweiter Ordnung bekommt man alsdann:

$$A = -1,4104 \beta - 1,5934 \beta \cdot \Delta q \quad . \quad . \quad (9).$$

Es bleibt jetzt noch übrig  $\beta$  und  $\Delta q$  in den Fehlern  $\chi$  und  $\psi$  des Nicols auszudrücken. Der Winkel  $\beta$  ist der Azimuth  $SNB$  oder  $SN'B'$  (Fig. 1) des austretenden Strahles, also im ersten Stande des Nicols, wenn  $ANB$  der Hauptschnitt ist:

$$\beta = \chi \frac{1}{\sin p},$$

im zweiten Stande nach Drehung von  $d^\circ$ , wenn  $A'N'B$  der Hauptschnitt ist:

$$\beta' = \chi \frac{1}{\sin p} + \psi \frac{\sin d}{\sin p} - \psi^2 \frac{\sin d \cos d \cos p}{\sin^2 p}.$$

Der Winkel  $q = 22^\circ + \Delta q$  ist der Austrittswinkel  $SN$  oder  $SN'$  des Strahles, deshalb in den zwei Ständen des Nicols:

$$22^\circ + \Delta\varphi = p + \psi + \frac{\chi^2}{2\operatorname{tg} p}$$

und

$$22^\circ + \Delta\varphi' = p + \psi \cos d + \frac{1}{2\operatorname{tg} p} (\psi^2 \sin^2 d + \chi^2),$$

oder  $p - 22^\circ = m$  setzend:

$$\Delta\varphi = m + \psi + \frac{\chi^2}{2\operatorname{tg} p}$$

und

$$\Delta\varphi' = m + \psi \cos d + \frac{1}{2\operatorname{tg} p} (\psi^2 \sin^2 d + \chi^2).$$

Man bekommt also:

$$A = -\frac{1,4104}{\sin p} \chi - \frac{1,5934}{\sin p} \chi (m + \psi)$$

und

$$\begin{aligned} A' = & -\frac{1,4104}{\sin p} \left( \chi + \psi \sin d - \psi^2 \frac{\sin d \cos d \cos p}{\sin p} \right) \\ & - \frac{1,5934}{\sin p} (\chi + \psi \sin d) (m + \psi \cos d) \quad . \quad . \quad (10) \end{aligned}$$

Hieraus läßt sich leicht die Beziehung zwischen Drehungswinkel des Nicols und Drehungswinkel der Polarisationsebene ableiten.

Wenn in Figur 1 die Polarisationsebene des austretenden Strahles im ersten Stande des Nicols  $SP$ , im zweiten Stande  $SP'$  ist, so wird:

$$P SN = 90 - A,$$

$$P' SN' = 90 - A',$$

deshalb

$$P' SP = A - A' + N' SN.$$

In dem sphärischen Dreieck  $SZN'$  ist:

$$SN' = p + \psi \cos d + \frac{1}{2\operatorname{tg} p} (\psi^2 \sin^2 d + \chi^2),$$

$$ZN' = p + \frac{\chi^2}{2\operatorname{tg} p}$$

und

$$SZN' = 180^\circ - d,$$

woraus mit Weglassung der Größen dritter und höherer Ordnung folgt:

$$N'SZ = N'SN = d - \frac{\sin d}{\operatorname{tg} p} \psi + \frac{(\cos^2 p + 1) \sin 2d}{4 \sin^2 p} \psi^2.$$

Also ist die Drehung  $D = P'SP$  der Polarisations-ebene:

$$D = \frac{1,4104}{\sin p} \left( \psi \sin d - \psi^2 \frac{\sin 2d \cos p}{2 \sin p} \right) + \frac{1,5934}{\sin p} \left( m \psi \sin d + \frac{1}{2} \psi^2 \sin 2d - \chi \psi (1 - \cos d) \right) + d - \frac{\sin d}{\operatorname{tg} p} \psi + \frac{(\cos^2 p + 1) \sin^2 d}{4 \sin^2 p} \psi^2 \quad (11).$$

Nimmt man in dieser Gleichung den Werth von  $p = 22^\circ + \Delta q - \psi - \frac{\chi^2}{2 \operatorname{tg} p}$ , so ist mit Berücksichtigung der Größen zweiter Ordnung:

$$D = d + 1,2899 \sin d \cdot \psi + 0,7805 \sin 2d \cdot \psi^2 - 4,2535 (1 - \cos d) \chi \psi + 2,0611 \sin d \cdot m \psi \quad (12)$$

und

$$d = D - 1,2899 \sin D \cdot \psi + 0,0514 \sin 2D \psi^2 + 4,2535 (1 - \cos D) \chi \psi - 2,0611 \sin D \cdot m \psi \quad (13).$$

Bei einem anderen Drehungswinkel  $d'$ , wenn die Polarisationsebene  $P''S$  ist, bekommt man analoge Werthe für  $d'$  und  $P''SP = D'$ , und wenn man jetzt die Drehung  $P''SP'$  der Polarisationsebene von einem willkürlichen Stande ausgehend  $R$ , die abgelesene Drehung des Nicols  $r$  nennt, so ist:

$$R = D' - D, \quad r = d' - d$$

und

$$r = R - p [\sin (D + R) - \sin D] \psi + q [\sin 2 (D + R) - \sin 2 D] \psi^2 - S [\cos (D + R) - \cos D] \chi \psi - t [\sin (D + R) - \sin D] m \psi \quad (14)$$

worin

$$p = 1,2899 \quad q = 0,0514 \quad S = 4,2535 \quad t = 2,0611 \text{ ist.}$$

Berechnung des Fehlers durch unrichtige Stellung der Kalkspathplatten des Savart'schen Polariskops.

Die eigentlichen Fransen, die man beim polarisirten Lichte durch das Savart'sche Polariskops erblickt, verschwinden, wenn die Polarisationsebene des einfallenden Strahles solch einen Stand hat, daß dieser Strahl durch die erste Kalkspathplatte nicht doppelt gebrochen wird,

sondern nur als ordentlicher oder außerordentlicher Strahl durchgeht. Die in diesem Momente bei homogenem Lichte auftretenden Querfransen lasse ich unberücksichtigt, da sie wohl die Beobachtung erschweren, aber keinen Einfluß ausüben auf den Stand der Polarisationssebene, bei welchem das Verschwinden der Hauptfransen stattfindet. Es muß deshalb bestimmt werden, welches bei einem mit Fehlern behafteten Plattenpaar die Lage des einfallenden Strahles seyn muß, damit er nur als ordentlicher oder als außerordentlicher Strahl durch die erste Platte durchgelassen wird.

Den Formeln Neumann's (Pogg. Ann. Bd. 42, S. 8) zufolge geht der außerordentliche oder der ordentliche Strahl nur dann durch, mit andern Worten ist die Intensität des ordentlichen oder außerordentlichen Strahles dann gleich Null, wenn die Azimuthe der Polarisationssebene  $\gamma$  oder  $\gamma'$  bestimmt sind durch:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos v \cos q \sin^2 q_0 - \sin v \sin q_0 \cos \beta \cos^2 q_0 + \cos v \sin q_0 \sin q \cos q - \sin v \cos q_0 \cos \beta \sin q \cos q}{\sin v \sin (q + q_0) \sin \beta} \quad (15)$$

und

$$\operatorname{tg} \gamma' = - \frac{\sin v \sin \beta (\sin q \cos q + \sin q_0 \cos q_0)}{(\cos v \sin q_0 - \sin v \cos q_0 \cos \beta) \sin (q + q_0)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (16).$$

Formel (15) gilt, wenn nur der außerordentliche, Formel (16), wenn nur der ordentliche Strahl durchgeht.

Wie vorher bezeichnen wiederum  $q$  und  $q_0$  die Brechungswinkel des ordinären und extraordinären Strahles, deren Werthe noch in  $q$  und bekannte Größen übergeführt werden müssen, durch die schon erwähnte Formel

$$\sin \varphi_0 = \mu \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und

$$\sin^2 \varphi_0 = \sin^2 \varphi [\pi^2 + (\mu^2 - \pi^2)(\cos \nu \cos \varphi_0 + \sin \nu \sin \varphi_0 \cos \beta)^2] \quad . \quad (7).$$

Wenden wir jetzt diese Formeln an auf das Savart'sche Polariskop. Kommen dabei keine Fehler vor, so fällt die Normale mit dem eintretenden Strahl zusammen, und die optische Axe macht damit einen Winkel von  $45^\circ$ . Sey aber in Wirklichkeit der Winkel der optischen Axe zur Normalen  $N$  (Figur 2) oder Bogen  $AN = \nu = 45^\circ + \delta$ ,

Figur 2.



der Eintrittswinkel des Strahles  $S$  oder Bogen  $NS = \varphi = i$  und der Azimuth der Einfallsebene in Beziehung zum Hauptschnitte, oder Winkel  $SNA = \beta$ , worin  $i$  und  $\delta$  kleine Größen erster Ordnung sind;  $\varphi_0$  und  $\varphi_0$  sind dann auch kleine Größen erster Ordnung, und deshalb ist der Nenner in der Formel sowohl für  $\tan \gamma$  wie für  $\tan \gamma'$  auch eine kleine Größe derselben Ordnung. Um  $\gamma$  und  $\gamma'$  bis Größen zweiter Ordnung inclusive genau zu bestimmen, muß man deshalb  $\varphi_0$  und  $\varphi_0$  bis Größen dritter Ordnung berechnen.

Nach Substitution von  $\varphi = i$  und  $\nu = 45^\circ + \delta$  in (6) und (7) bekommt man nach einigen Reductionen:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_0 &= \mu i - \frac{1}{6} \mu i^3, \\ \sin \varphi_0 &= i \sqrt{\frac{\mu^2 + \pi^2}{2}} - i \delta \frac{\mu^2 - \pi^2}{\sqrt{2}(\mu^2 + \pi^2)} + i^2 \frac{2(\mu^2 - \pi^2) \cos \beta}{2} \\ &\quad - i \delta^2 \frac{(\mu^2 - \pi^2)^2}{2(\mu^2 + \pi^2) \sqrt{2}(\mu^2 + \pi^2)} + i^3 \frac{(\mu^2 \cos 2\beta - \pi^2)(\mu^2 - \pi^2)}{4 \sqrt{2}(\mu^2 + \pi^2)}. \end{aligned}$$

Bringt man diese Werthe in Formel (15), so findet man:

$$\operatorname{tg} \gamma = -\cot \beta + \frac{2\mu^2 + \sqrt{2}(\mu^2 + \pi^2)}{2 + \sqrt{2}(\mu^2 + \pi^2)} \frac{i}{\sin \beta} + \frac{8 - 6(1 - \mu^2)(\pi^2 - \mu^2) - 3(\mu^2 + \pi^2)(1 - 2\mu^2) + (6\mu^2 + 1)\sqrt{2}(\mu^2 + \pi^2)}{3[2 + \sqrt{2}(\mu^2 + \pi^2)]^2} i^2 \cot \beta - \frac{4[\mu^4 + 3\mu^2\pi^2 + 3\mu^2 + \pi^2 + (3\mu^2 + \pi^2)\sqrt{2}(\mu^2 + \pi^2)]}{[2 + \sqrt{2}(\mu^2 + \pi^2)]^2 \sqrt{2}(\mu^2 + \pi^2)} \frac{i\delta}{\sin \beta} \quad (17)$$

Setzt man hierin für  $\mu$  und  $\pi$  ihre Werthe:

$$\text{bei Kalkspath} \quad \frac{1}{\mu} = 1,65850$$

$$\frac{1}{\pi} = 1,48635,$$

so ist:

$$\gamma = 90^\circ + \beta + 0,61165 i \cdot \sin \beta + 0,71717 i^2 \cos \beta \sin \beta - 1,20679 i \delta \cdot \sin \beta \quad (18).$$

Den Azimuth  $\gamma'$  des Strahles wenn nur der ordentliche Strahl durchgeht, findet man auf ähnliche Weise durch:

$$\operatorname{tg} \gamma' = \operatorname{tg} \beta \left\{ 1 + \frac{\mu i}{\cos \beta} - \frac{(1 - 2\mu) \cos^2 \beta - 2\mu^2}{2 \cos^2 \beta} i^2 - 2 \mu \frac{i \delta}{\cos \beta} \right\} \quad (19),$$

oder nach Substitution durch:

$$\gamma' = \beta + 0,60295 i \sin \beta + 0,23325 i^2 \sin 2\beta - 1,20590 \delta \cdot i \sin \beta \quad (20).$$

Der Winkel  $\gamma - \gamma'$  oder die Drehung, welche man der Polarisationsene des einfallenden Strahles geben muß, um in zwei aufeinander folgenden Quadranten das Verschwinden der Fransen hervorzurufen, ist:

$$\gamma - \gamma' = 90 + u \sin \beta \cdot i + v \sin 2\beta \cdot i^2 - w \sin \beta \cdot \delta i \quad (21)$$

worin:

$$u = 0,00870, \quad v = 0,12534 \quad \text{und} \quad w = 0,00089.$$





$$Q_{180} = P_0 + R + 180 + p [\sin (D + R) + \sin D] \psi \\ + q [\sin 2(D + R) - \sin 2D] \psi^2 \\ + s [\cos (D + R) + \cos D] \psi \chi \\ + t [\sin (D + R) + \sin D] \psi m.$$

$$P_{270} = P_0 + 270 + u \sin \beta \cdot i + v \sin 2\beta i^2 - w \sin \beta \cdot \delta i \\ + p [\cos D + \sin D] \psi - p u \sin \beta \sin D i \psi \\ - 2q \sin 2D \psi^2 - s [\sin D - \cos D] \psi \chi \\ + t [\cos D + \sin D] m \psi.$$

$$Q_{270} = P_0 + R + 270 + u \sin \beta i + v \sin 2\beta i^2 \\ - w \sin \beta \cdot \delta i + p [\cos (D + R) + \sin D] \psi \\ - p u \sin \beta \sin (D + R) \cdot i \psi - q [\sin 2(D + R) \\ + \sin 2D] \psi^2 - s [\sin (D + R) - \cos D] \psi \chi \\ + t [\cos (D + R) + \sin D] \psi m.$$

Die abgelesenen Drehungswinkel in den 4 Quadranten

$r_0 = Q_0 - P_0$ ,  $r_{90} = Q_{90} - P_{90}$  usw. sind dann:

$$r_0 = R - p [\sin D (+R) - \sin D] \psi + q [\sin 2(D + R) \\ - \sin 2D] \psi^2 - s [\cos (D + R) - \cos D] \chi \psi \\ - t [\sin (D + R) - \sin D] \psi m.$$

$$r_{90} = R - p [\cos (D + R) - \cos D] \psi - q [\sin 2(D + R) \\ - \sin 2D] \psi^2 + s [\sin (D + R) - \sin D] \chi \psi \\ - t [\cos (D + R) - \cos D] \psi m \\ + p u \sin \beta [\sin (D + R) - \sin D] i \psi.$$

$$r_{180} = R + p [\sin (D + R) - \sin D] \psi + q [\sin 2(D + R) \\ - \sin 2D] \psi^2 + s [\cos (D + R) - \cos D] \psi \chi \\ + t [\sin (D + R) - \sin D] \psi m \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$r_{270} = R + p [\cos (D + R) - \cos D] \psi - q [\sin 2(D + R) \\ - \sin 2D] \psi^2 - s [\sin (D + R) - \sin D] \psi \chi \\ + t [\cos (D + R) - \cos D] \psi m \\ - p u \sin \beta [\sin (D + R) - \sin D] i \psi;$$

woraus:

$$\frac{1}{2} (r_0 + r_{180}) = R + q [\sin 2(D + R) - 2D] \psi^2 \quad (24)$$

und

$$\frac{1}{4} (r_0 + r_{90} + r_{180} + r_{270}) = R \quad . \quad . \quad (25).$$

Wie vorher angegeben, ist in diesen Formeln:

$$p = 1,2899,$$

$$q = 0,0514,$$

$$s = 4,2535,$$

$$t = 2,0611,$$

$$u = 0,0087,$$

$$v = 0,1253,$$

$$w = 0,0009;$$

$\psi$ ,  $\chi$  und  $m$  haben Beziehung auf die Austrittsfläche des drehenden Nicols, und zwar ist:

$\psi$  der Winkel zwischen Drehungsaxe und dem austretenden Strahl,

$\chi$  der Winkel zwischen Drehungsaxe und Hauptschnitt,

$22^\circ + m$  der Winkel zwischen der optischen Axe und der Projection der Drehungsaxe auf den Hauptschnitt.

$\delta$ ,  $i$  und  $\beta$  haben Beziehung auf die Eintrittsfläche des Kalkspathplattenpaars des Savart'schen Polariskops, und zwar ist:

$45^\circ + \delta$  der Winkel zwischen der optischen Axe und der Normalen auf der Eintrittsfläche,

$i$  der Eintrittswinkel des Strahles,

$\beta$  der Azimuth der Einfallsebene in Beziehung zum Hauptschnitte.

Weiter ist  $D$  der Winkel zwischen einer beim Nicol constanten Fläche und der Polarisationssebene des aus dem Nicol tretenden Strahles, wenn ohne drehende Substanz die Fransen verschwinden.

Aus den Formeln geht hervor, daß, so wie Wild vermuthet, der Einfluß der verschiedenen Fehler, incl. der Größen zweiter Ordnung aufgehoben wird, wenn man das Mittel der Ablesungen in den vier Quadranten nimmt. Mit großer Sicherheit mag man aber auch annehmen, daß die Fehler aufgehoben werden, wenn man das Mittel nimmt aus den abgelesenen Drehungen in zwei diametralen Quadranten. Die Größen erster Ordnung und die Mehrzahl der Größen zweiter Ordnung sind dann eliminirt, in dem Resultate kommt nur der Fehlerausdruck  $q [\sin 2(D + R) - \sin 2D] \psi^2$  vor, wovon der größte Werth  $2q\psi^2$  oder

0,1028  $\psi^2$  fast immer viel kleiner ist als die Gröfse, welche man noch in Rechnung zu bringen hat; denn der grösste Unterschied zwischen den Bestimmungen der Drehungswinkel in zwei Quadranten  $2p\psi$  oder  $2,5798\psi$  ist, wie aus den Beobachtungen von Wild und anderen hervorgeht, niemals  $1^\circ$ . Nehmen wir daher im ungünstigsten Fall  $\psi = \frac{1}{2}^\circ$ , so wird  $0,102 \delta \psi^2$  ungefähr 1,7 Secunden, eine Gröfse viel kleiner als die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, und welche bei den Messungen mit dem Polaristrobometer sicher vernachlässigt werden darf.

Vergleichen wir jetzt die Theorie mit den Beobachtungen. Zu dem Zwecke werden wir aus den Beobachtungen den Werth berechnen der verschiedenen Constanten, wovon die Fehler abhängen, und hiemit die abgelesenen Winkel verbessern. Aus der Uebereinstimmung oder Nichtübereinstimmung der so verbesserten Gröfsen, wird dann die Richtigkeit oder Unrichtigkeit des angenommenen Fehlerausdruckes hervorgehen. Es wird bei dieser Rechnung genügen nur die Gröfsen erster Ordnung aufzunehmen, da die der zweiten so klein sind, daß ihre Bestimmung aus den Beobachtungen mit dem Polaristrobometer vollkommen illusorisch seyn würde.

Zur Bestimmung von  $\psi$  und  $D$  benutzt man am besten mit Vernachlässigung von  $\chi\psi$  und  $i\psi$ :

$$\begin{aligned} P_{180} - P_0 - 180 &= 2(p + tm) \sin D. \psi \\ P_{270} - P_{90} - 180 &= 2(p + tm) \cos D. \psi \\ Q_{180} - Q_0 - 180 &= 2(p + tm) \sin (D + R). \psi \\ Q_{270} - Q_{90} - 180 &= 2(p + tm \cos)(D + R). \psi \end{aligned} \quad (26)$$

Zur Bestimmung von  $u \sin \beta. i$  kann man sich bedienen von:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(P_{270} + P_{90} - P_{180} - P_0) - 90 &= u \sin \beta. i, \\ \frac{1}{2}(Q_{270} + Q_{90} - Q_{180} - Q_0) - 90 &= u \sin \beta. i \end{aligned} \quad (27)$$

Wegen der Kleinheit  $u = 0,0087$  wird  $u \sin \beta. i$  wohl nicht genau aus den Beobachtungen abzuleiten seyn.

Zu dieser Vergleichung von Theorie und Beobachtung verwenden wir die genauen Bestimmungen der Drehungs-

constante des Zuckers von Wild in seiner genannten Schrift „Ueber ein neues Polaristrobometer“ usw. S. 48 seq. Es werden da fünf Beobachtungsserien mitgetheilt, eine auf zehn, vier auf vier, fünf oder sechs Einstellungen beruhend. In der ersten Serie weicht die Ablesung bei leerer und voller Röhre ungefähr  $2^{\circ},2$  ab von den nämlichen Ablesungen in den folgenden Serien; wahrscheinlich hat zwischen beiden eine kleine Aenderung des Instrumentes stattgefunden, so daß die erste und die folgenden Serien gesondert berechnet werden müssen.

Nimmt man sowohl von  $\psi$  als von  $D$  und von  $u \sin \beta.i$  das Mittel der beiden Werthe, welche nach den Formeln (26) aus allen Beobachtungen von Wild berechnet sind, so bekommt man:

	$\psi$	$D$	$u \sin \beta.i$	
1 <sup>te</sup> Serie	14',3	79°,8	— 0',5	aus 20 Einstellungen,
2 <sup>te</sup> bis 5 <sup>te</sup> Serie	13',0	67°,7	+ 0',5	aus 40 Einstellungen.

Der Werth von  $u \sin \beta.i$  ist so klein, daß der Einfluß der Beobachtungsfehler sicher viel größer ist; wir werden denn auch einfach  $u \sin \beta.i$  gleich Null annehmen.

Mit diesem Werth habe ich nach den Formeln (22) und (23) die Verbesserungen der verschiedenen Ablesungen bestimmt, und von diesen verbesserten Ablesungen und Drehungswinkeln folgende mittlere Fehler berechnet; daneben sind zur Vergleichung die mittleren Fehler der unverbesserten Ablesungen und Drehungswinkel gestellt, wenn man annimmt, daß die Unterschiede in den verschiedenen Quadranten nur von zufälligen Beobachtungsfehlern herrühren.

	Verbessert	Unverbessert	Zahl der Werthe.
Mittlere Fehler einer Ablesung . .	3',41	18',08	40
Mittlere Fehler eines Drehungswinkels bestimmt aus zwei Ablesungen in einem Quadranten . . . . .	5',69	13',02	20
Mittlere Fehler eines Drehungswinkels bestimmt aus acht Ablesungen in vier Quadranten . . . . .	2',04	2',04	5.

Berechnet man hieraus den mittleren Fehler eines Drehungswinkels aus acht Ablesungen in vier Quadranten, so bekommt man:

	Ver- bessert	Unver- bessert
aus den einfachen Ablesungen . . . .	2',40	13',49
aus den Drehungswinkeln durch zwei Ablesungen in einem Quadranten bestimmt . . . . .	2',84	6',51
aus den Drehungswinkeln durch acht Ablesungen in vier Qua- dranten bestimmt . . . . .	2',04	2',04
	Mittel: 2',51.	

Aus diesen Zahlen sieht man: 1) daß die Unterschiede der Ablesungen in den verschiedenen Quadranten nicht allein durch zufällige Beobachtungsfehler erklärt werden müssen, und daß sie größtentheils durch die angebrachten Verbesserungen aufgehoben werden; 2) daß wirklich die Verbesserungen vorgestellt werden durch eine Formel ähnlich derjenigen, welche wir aus der Theorie abgeleitet haben, denn sonst würden die mittleren Fehler eines Drehungswinkels aus acht Ablesungen in vier Quadranten, auf drei verschiedene Weisen berechnet, nicht die Uebereinstimmung zeigen, welche man beobachtet, sondern Abweichungen darbieten, wie man sie bei den mittleren Fehlern der unverbesserten Ablesungen sieht.

Die Ursache der Differenzen zwischen den drei Werthen 2',40, 2',84 und 2',04 muß man sicher größtentheils oder ganz, in der kleinen Zahl der Werthe suchen, woraus besonders der letztere mittlere Fehler abgeleitet ist; das Mittel 2',5 wird nicht viel von dem wirklichen Werth abweichen. Der mittlere Fehler einer Einstellung ist dann 3',5. Der Drehungswinkel  $40^{\circ},287$  der normalen Zuckerlösung von Wild aus 30 Bestimmungen, jede in vier Quadranten abgeleitet, hat dann einen mittleren Fehler von  $\frac{2,5}{\sqrt{30}} = 0',46 = 0^{\circ},0077$ , die Drehungsconstante 1505,64 einen mittleren Fehler von 0,29.

Die Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen bestätigt, wie aus dem vorigen hervorgeht, die erstere genügend; man darf dann mit Recht behaupten, das bei dem Polaristrobometer keine anderen constanten Fehler vorkommen als die, welche wir in die Theorie aufgenommen haben. Ihr Einfluß wird, incl. der Gröfsen zweiter Ordnung, vollständig aufgehoben, wenn man das Mittel aus den Bestimmungen in vier Quadranten nimmt, und auch wenn nicht vollständig, doch bei der gewöhnlichen Construction der Instrumente mit genügender Genauigkeit, wenn man das Mittel nimmt aus den Bestimmungen in zwei diametralen Quadranten.

Natürlich kann man die mitgetheilten Berechnungen von dem Einfluß der Fehler des Nicols auch anwenden bei allen denjenigen Instrumenten, wobei ein drehbares Nicol'sches Prisma vorkommt, Photometer usw. Wenn man also mit diesen Instrumenten zwei Beobachtungen anstellt in diametralen Quadranten, was immer möglich ist, wird man das Mittel, in so weit dies oben angegeben ist, als unabhängig von den genannten Fehlern, deren Einfluß sonst ziemlich groß seyn kann, betrachten dürfen.

Delft, December 1871.

#### Nachschrift.

Bei dem Polaristrobometer, dessen Wild sich bei seinen Messungen bedient hat, war, wie ich später sah, das Savart'sche Polariskop aus zwei Quarzplatten zusammengestellt. Dadurch werden die Werthe von  $u$ ,  $r$  und  $w$  kleiner, so daß es um so mehr gerechtfertigt ist, den Werth von  $u \sin \beta$  bei den Verbesserungen zu vernachlässigen. Zum Schluß will ich noch bemerken, daß alle ziemlich weitläufige Reductionen, wovon ich nur die Resultate mitgetheilt habe, doppelt gerechnet sind, so daß man sie in dieser Hinsicht wohl als fehlerfrei betrachten kann.



**VI. Ueber die Bestimmung der Schmelz- und Erstarrungstemperatur der Fette;  
von Fr. Rüdorff.**

---

Im 140. Bande dieser Annalen habe ich meine Ansicht über die Bestimmung der Schmelz- und Erstarrungstemperatur der Fette und ähnlicher Substanzen mitgetheilt. Ein Aufsatz des Hrn. Wimmel in Hamburg über dasselbe Thema im 142. Bande S. 171 dieser Annalen giebt mir Veranlassung auf diesen Gegenstand nochmals zurückzukommen, zumal Hr. Wimmel aus seinen Versuchen andere Schlüsse ziehen zu müssen glaubt, als zu denen ich gelangt bin.

Zu Versuchen über obiges Thema wurde ich veranlaßt durch die bei der Darstellung reinen Eisessigs gemachte Beobachtung <sup>1)</sup>, daß die Angaben vieler Lehrbücher der Chemie der Eisessig schmelze bei höherer Temperatur als bei der derselbe erstarre, auf einem Irrthum beruhe. Da sich bei fast allen Fetten ähnliche Angaben finden, so lag es mir nahe, auch die Schmelz- und Erstarrungstemperatur einiger Fette zu untersuchen. Es zeigte sich bald, daß die Bestimmung der betreffenden Temperaturen bei den Fetten wegen ihrer physikalischen Beschaffenheit mit besondern Schwierigkeiten verbunden ist. Zugleich fiel mir die Analogie auf, welche die geschmolzenen Fette beim Erstarren mit den übersättigten und den gefrierenden Salzlösungen zeigten und eingedenk der großen Schwierigkeiten, welche sich einer genaueren Bestimmung des Gefrierpunkts einiger Salzlösungen entgegenstellten, gelangte ich bald zu der Ansicht, daß es bei manchen Fetten unmöglich sey, ihren Schmelz- oder Erstarrungspunkt auch nur bis auf ganze Grade genau zu bestimmen, daß aber bei vorsichtigem Experimentiren die Differenz in den Temperaturen des Schmelzens und Erstar-

1) Diese Annalen Bd. 140, S. 415.

rens mehr und mehr abnimmt, so daß ich die noch bleibende, geringe Verschiedenheit in diesen Temperaturen auf die eigenthümliche physikalische Beschaffenheit (Zähigkeit und schlechtes Wärmeleitungsvermögen) des betreffenden Fettes schieben zu müssen glaubte. Ich habe deshalb den früher von mir beobachteten Zahlenwerthen kein allgemeines Interesse beigelegt, es schien mir vielmehr hinreichend, die Aufmerksamkeit auf die oben erwähnte Analogie zu lenken und auszusprechen, daß die aus allen Zahlenangaben hervorgehende und von allen Beobachtern, auch von Hrn. Wimmel behauptete Verschiedenheit in der Schmelz- und Erstarrungstemperatur vieler Fette nur in der mangelhaften Bestimmungsmethode begründet sey.

Der oben citirte Aufsatz des Hrn. Wimmel veranlaßt mich die von mir früher beobachteten Zahlenwerthe zugleich mit einigen neuerdings wiederholten Bestimmungen ausführlicher mitzutheilen. Es wird sich bei Vergleichung dieser Zahlen mit den Angaben des Hrn. Wimmel herausstellen, in wie weit letztere geeignet sind, Irrthümer in dieser Materie zu erregen. Ich habe es mir ganz besonders angelegen seyn lassen, den Grad der Zuverlässigkeit zu ermitteln, welchen die Bestimmung der Schmelz- und Erstarrungstemperatur der Fette beanspruchen kann und aus den weiter unten mitgetheilten Zahlen werden die Fehler sich ergeben, mit welchen derartige Angaben behaftet sind.

Die zur Bestimmung des Schmelzpunktes der Fette bisher vorgeschlagenen Methoden sehen sämmtlich einen gewissen Grad des Erweichens als Schmelzen an. Ich habe sie fast alle durchprobt und mich überzeugt, daß bei einigen Fetten mit keiner derselben auch nur einigermaßen übereinstimmende Resultate erhalten werden. Bei Anwendung der auch von Hrn. Wimmel stets befolgten Methode der Schmelzpunktsbestimmung, die festen Fette in Glasröhren, welche in Wasser eingestellt sind, durch Erwärmen des letzteren zum Emporsteigen zu bringen und die Temperatur als den Schmelzpunkt der Fette zu be-

trachten, bei welcher sie sich in Bewegung setzen, verfuhr ich in folgender Weise: Vier gleich weite, sehr dünnwandige Glasröhren von 3<sup>mm</sup> Durchmesser wurden durch Aufsaugen bis zu 25<sup>mm</sup> Höhe mit ein und demselben Japanwachs gefüllt und zugleich dicht neben einander in ein sehr geräumiges Becherglas mit Wasser gestellt. Um die Berührung der Röhren mit dem Boden des Glases zu vermeiden und um die Temperatur des Wassers, welches auf einem Sandbade erwärmt wurde, in den vom Boden etwas entfernten Schichten gleichmäßig zu machen, befand sich etwa 40<sup>mm</sup> vom Boden entfernt ein Drahtnetz, auf welchem die senkrecht stehenden Röhren ruhten. Zwischen den Röhren hing ein Thermometer, dessen Gefäß in gleicher Höhe mit der Fettschicht sich befand. Das Wasser stand etwa 100<sup>mm</sup> über dem Fett und ragten die bis auf das Fett leeren Röhren selbstverständlich aus dem Wasser hervor. Die gefüllten Röhren hatten mehrere Tage, sich selbst überlassen, gelegen. Bei dem sehr langsamen Erwärmen stieg das Fett in den vier Röhren bei folgenden Temperaturen empor:

54,5      55,2      55,7 und 56°,1 C.

Bei Wiederholung des Versuchs mit denselben oder auch andern Röhren mit demselben, so wie auch andern Fetten erhielt ich Zahlen von noch geringerer Uebereinstimmung. Ob Hr. Wimmel bei Anwendung dieser Methode mehr übereinstimmende Resultate erhalten hat, oder ob die von ihm mitgetheilten Zahlen das Mittel aus mehreren Beobachtungen sind, geht aus seiner Arbeit nicht hervor.

Nachdem ich mich durch vielfältige, nach verschiedenen Seiten hin modificirte Versuche von der Unbrauchbarkeit dieser Methode überzeugt hatte, suchte ich den Schmelzpunkt dadurch zu bestimmen, daß ich die Thermometerkugel mit einer Schicht des Fettes überzog, nach ein- bis zweitägigem Liegenlassen im Wasserbade erwärmte und die Temperatur notirte, bei welcher das Fett sich loslöste und aufstieg. Bei den meisten in dieser Weise untersuchten Fetten löste sich die Substanz nicht

mit einem Male, sondern dieses fand nur bruchstückweise statt. So löste sich bei einer Probe Paraffin das erste bei 53,1, das letzte und meiste bei 53°,7, bei einer anderen das erste bei 52,5, das letzte bei 53°,0 ab. Wenn man die Temperatur als den Schmelzpunkt der Fette definiren will, bei welcher dieselben soweit erweichen, daß sie sich von einer damit überzogenen Thermometerkugel loslösen und im Wasser aufsteigen, so liegt der Schmelzpunkt des Paraffins zwischen 53,1 bis 53,7 respective bei 52,5 bis 53°,0, der des Japanwaxes bei 50,4 bis 53°,5, des gelben Bienenwaxes bei 63°,9, der Cacaobutter bei 33,5, der Stearinsäure, wie solche zu Kerzen angewandt wird, bei 56,0 bis 56°,4, des Wallraths bei 44,3, des Hammeltalgs bei 46,5 bis 47,4, des Rindertalgs bei 43,5 bis 45,0 und bei der Muskatbutter bei 78 bis 80 und in einem andern Versuch mit demselben Material bei 70°.

Der Versuch mit der Muskatbutter ist recht geeignet uns die Bedeutung des sogenannten Schmelzpunktes klar zu machen. Obschon dieses Fett bei 50° schon vollständig flüssig ist und sich leicht schütteln läßt und ein Stückchen desselben auf Wasser von 50° sofort auseinanderfließt, so haftet es doch bei dem zähen Zustande, in welchem es sich selbst über 50° befindet, so fest am Thermometer, daß es mitunter erst bei 20 bis 30° über dieser Temperatur sich ablöst und emporsteigt. Aehnlich verhält es sich mit dem Hammel- und Rindertalg, welche beide viele Grade über der Temperatur, bei welcher dieselben im Glaskölbchen erhitzt, leicht beweglich sind, so dünnflüssig werden, daß dieselben sich von der Thermometerkugel loslösen oder in einer engen Glasröhre emporsteigen.

Wenn die nach dieser letzten Methode erhaltenen Schmelzpunkte auch bei manchen Fetten ein sehr wenig befriedigendes Resultat ergeben, so möchte sich dieselbe doch wegen ihrer leichten Handhabung, wenn man nun einmal durchaus den Schmelzpunkt bestimmen will, für technische Zwecke bei der Stearinsäure, dem Paraffin und

Wallrath mehr empfehlen als die durch Erwärmen der Fette in Glasröhren, und die im Folgenden unter dem Namen Schmelzpunkt mitgetheilten Zahlen sind nach dieser Methode erhalten. Ich möchte diese letztere Methode auch schon deshalb der ersteren vorziehen, weil bei derselben die Adhäsion des erweichten Fettes an dem festen Körper in weit beschränkterem Mafse stattfindet und man jedenfalls von dem durch die Weite der Röhre bedingten Fehler unabhängig ist. Ich will jedoch nicht unterlassen, darauf aufmerksam zu machen, daß die Dicke der Fettschicht, mit welcher die Thermometerkugel überzogen ist, auf die Temperatur des Aufsteigens von sehr merklichem Einfluß ist. Die oben mitgetheilten Zahlen wurden bei Anwendung einer Fettschicht von mehr als 3<sup>mm</sup> Dicke erhalten.

Was nun die Bestimmung der Erstarrungstemperatur betrifft, so geschah dieselbe in der schon früher (diese Ann. Bd. 140 S. 419) angegebenen Weise durch Erkaltenlassen des geschmolzenen Fettes unter stetem Umschütteln. Notirt man den Gang des eingetauchten Thermometers von Minute zu Minute, so zeigt sich, daß bei einigen Fetten die Temperatur bis zu einem gewissen Werthe sinkt, dann eine Zeitlang constant bleibt und von da an weiter sinkt. Diese constante Temperatur ist noch dadurch bemerkenswerth, daß das Fett während der Dauer derselben erstarrt, so daß diese Temperatur als der Erstarrungspunkt zu betrachten ist. Als Beispiel führe ich hier die mit Stearinsäure, wie solche zur Kerzenfabrikation verwandt wird, von Minute zu Minute beobachteten Temperaturen an:

60,0	56,7	56,1	55,6	55,3	55,2	55,2
55,2	55,2	55,2	55,1	55,0	54,9	54,8.

Bei 55,1 war die Masse fest. In derselben Weise erhielt ich für drei andere Sorten Stearinsäure die constanten Temperaturen . . . . . 55,7 55,8 54°,5 C.

Für vier verschiedene Sorten  
Paraffin . . . . . 49,6 52,8 53,0 53°,3 C.

Für zwei Sorten Wallrath . .	43,7 44°,2.
Für drei Sorten gelbes Wachs	61,4 62,6 62°,8.
Für weißes Wachs . . . .	61°,6.

Bei diesen Fetten läßt sich der Erstarrungspunkt mit großer Sicherheit und hinreichender Genauigkeit bestimmen. Daß verschiedene Proben von Paraffin, Stearin und andere einen verschiedenen Erstarrungspunkt zeigen, ist bei der ungleichen Beschaffenheit derartiger Producte selbstverständlich.

Bei einer anderen Gruppe von Fetten und zwar vorzugsweise den eigentlichen Glyceriden, sinkt die Temperatur bis zu einem gewissen Grade, während die geschmolzene Masse mehr oder weniger erstarrt, dann steigt die Temperatur um mehrere Grade, wobei meistens ein völliges Festwerden eintritt. Die von Minute zu Minute notirten Temperaturen der geschmolzenen und unter Umschütteln erkaltenden Cacaobutter, mag das Verhalten der Fette dieser Gruppe zeigen:

30,0	28,7	27,9	26,5	25,4	24,5	23,6
22,8	22,4	22,2	22,2	22,2	22,4	22,6 °C.

Die Masse ist ganz fest geworden und die Temperatur steigt langsam auf 27°,8, welche Temperatur etwa  $\frac{1}{2}$  Stunde lang constant anhält, worauf ein langsames Sinken des Thermometers eintritt.

Dieses Sinken und wieder Steigen der Temperatur ist schon lange bekannt und namentlich auch von Hrn. Wimmel beobachtet. Derselbe zieht aus seinen Beobachtungen den Schluß: „dieser Wendepunkt ist für jedes Fett ein ganz bestimmter und constanter, und es läßt sich gewiß rechtfertigen, ihn als den *natürlichen* Erstarrungspunkt zu bezeichnen.“ Das Maximum der Temperatur, auf welche das Thermometer beim Erstarren dieser Fette steigt, betrachtet Hr. Wimmel als einen zweiten Erstarrungspunkt, welchen er den *künstlichen* nennt. Von diesen beiden soll aber der natürliche der constantere und leichter zu bestimmende seyn. So würden denn einige Fette in ihrem

Verhalten gegen Wärme drei bemerkenswerthe Temperaturen zeigen: einen Schmelzpunkt und zwei Erstarrungspunkte. Wie es aber mit der Constanz des „natürlichen“ Erstarrungspunktes des Hrn. Wimmel beschaffen ist, wird aus Folgendem hervorgehen. Dieselbe Probe von Cacaobutter wurde wieder geschmolzen und der Gang des Thermometers während des Erkaltes beobachtet, die Temperatur sank auf  $25^{\circ},5$  und stieg dann auf  $27^{\circ},7$ . Bei nochmaliger Wiederholung sank die Temperatur auf  $23,2$  und stieg auf  $27,8$  und bei der vierten Wiederholung auf  $24,3$  und stieg auf  $27,8$ . Bei anderen Fetten wie Japanwachs, Muskatbutter, Rinder- und Hammeltalg zeigte sich eine ähnliche Constanz im natürlichen Erstarrungspunkt.

Es ist aber auch wohl von vorn herein klar, daß die Temperatur, bis zu welcher sich die geschmolzenen Fette abkühlen lassen, und von welcher an wieder ein Steigen stattfindet, nicht constant seyn kann. Ich habe schon in der früheren Mittheilung darauf aufmerksam gemacht, daß viele Fette beim Erstarren groÙe Aehnlichkeit mit den übersättigten oder auch gefrierenden Salzlösungen zeigen. Wir können die geschmolzenen Fette betrachten als Auflösungen eines festen Fettes in einem bei gewöhnlicher Temperatur flüssigen. Die dickflüssige Beschaffenheit, sowie das schlechte Wärmeleitungsvermögen derselben läßt den Zustand des Ueberkaltens sehr leicht eintreten. Das Erstarren der Fette geschieht von der Gefäßwand aus, und je nachdem wir durch mehr oder weniger heftiges Bewegen schon feste Theilchen in die noch flüssige Masse bringen, werden diese als Kerne dienen, von denen aus sich das Erstarren fortpflanzt, und wir werden die flüssigen Fette auf eine um so niedrigere Temperatur abkühlen können, je weniger schon feste Theilchen mit noch flüssigen in Berührung kommen. Wenn auch bei ruhigem Stehenlassen sich im Allgemeinen die Temperatur mehr erniedrigt als beim Schütteln, so gelingt es selbst beim vorsichtigsten Abkühlen nicht, den Wendepunkt der Temperatur auch nur annähernd constant zu erhalten.



Bei meinen früheren Versuchen über das Gefrieren des Wassers aus Salzlösungen, habe ich den Gefrierpunkt in der Weise bestimmt, daß ich die Lösung etwas unter den vorher annähernd ermittelten Gefrierpunkt abkühlte, durch Hineinwerfen eines Körnchens Schnee eine Eisbildung bewirkte und die Temperatur als den Gefrierpunkt notirte, auf welche das Thermometer während der Eisbildung stieg. Es leuchtet ein, daß bei der Bestimmung des Erstarrungspunktes der Fette ein ganz ähnliches Verhältniß obwaltet, beide zeigen das Phänomen des Ueberkaltens in demselben Maasse, nur steigt die Temperatur bei den Fetten in Folge ihrer zähen Beschaffenheit weit langsamer, als bei den Salzlösungen. Indessen stehen in dieser Beziehung die concentrirten Lösungen der leichtlöslichen Salze, wie z. B. des Mangansulfats, den Fetten nicht nach. Kühlt man eine solche Lösung viele Grade unter ihren Gefrierpunkt ab, und wirft mehrere Körnchen Eis hinein, so bilden sich in der Lösung zahlreiche Eisnadeln, und trotzdem läßt sich dieselbe noch weiter abkühlen bis die Temperatur derselben plötzlich, aber sehr langsam, steigt. Manche dieser Lösungen setzen einer genaueren Bestimmung des Gefrierpunktes ebenso unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen, wie dieses das geschmolzene Hammel- und Rindertalg in Bezug auf den Erstarrungspunkt thut.

Manchen dieser Fette ähnlich verhält sich das unterschwefligsaure Natron. Schmilzt man in einem Glasgefäß durch Eintauchen in heißes Wasser dieses Salz, läßt unter Umschütteln erkalten und wirft mehrere Stückchen des festen Salzes hinein, so bilden sich von etwa  $47^{\circ}$  an zahlreiche Krystallchen in der flüssigen Masse, die Temperatur sinkt aber noch immer und that dieses in einem Fall bis  $46^{\circ},4$ , worauf dann ein Steigen eintritt auf  $47^{\circ},9$  bis  $48^{\circ},0$ , welche Temperatur das Thermometer während längerer Zeit zeigt, bis ein fast völliges Erstarren eingetreten ist, so daß diese Temperatur als der Erstarrungspunkt des unterschwefligsauren Natrons anzusehen ist.

Es ist also nicht der Wendepunkt der Temperatur

constant, sondern bei vielen Fetten ist es das Maximum, bis zu welchem die Temperatur beim Erstarren wieder steigt. Wie ich in der früheren Mittheilung gezeigt habe, ist eine solche constante Temperatur beim Japanwachs die von  $50^{\circ},8$  und, wie aus obigen Zahlen hergeht, bei der Cacaobutter  $27^{\circ},8$ , bei der Muskatbutter steigt die Temperatur auf  $41^{\circ},8$ .

Um dieses Maximum der Temperatur, auf welches das Thermometer in den genannten Fetten steigt, zu erhalten, ist es aber nöthig, wie ich früher gezeigt habe, daß man das Fett bei möglichst niedriger Temperatur schmilzt, so daß noch Theilchen ungeschmolzenen Fettes in der bereits flüssigen Masse schwimmen und dann unter Umschütteln abkühlen läßt. Hierbei tritt nur eine sehr geringe Abkühlung unter den Erstarrungspunkt ein, und die Temperatur steigt dann um höchstens 1 bis 2 Grade. In der folgenden Tabelle sind die oben mitgetheilten Zahlenwerthe zusammengestellt, wozu ich noch bemerke, daß die hinter einem Fett befindlichen verschiedenen Zahlen sich auf ebenso viele Sorten des Fettes beziehen, ferner, daß den unter der Rubrik Schmelzpunkt befindlichen Zahlen nur die Bedeutung beizulegen ist, daß die Fette bei diesen Temperaturen soweit erweichen, um von einer damit überzogenen Thermometerkugel sich loszulösen und im umgebenden Wasser aufzusteigen.

	Schmilzt bei:	Erstarrt bei:	Temperatur steigt beim Erstarren auf:
Gelbes Bienenwachs	63°,4 C.	{ 61°,5 C. 62,6 62,3	
Weißes Wachs	61,8	61,6	
Paraffin	{ 49,6 52,5 bis 54,0 53,0 52,7 bis 53,2	{ 49,6 53,0 52,9 52,7	
Wallrath	{ 43,5 44,1 bis 44,3	{ 43,4 44,2	
Stearinsäure	{ 55,3 56,2 bis 56,6 56,0 bis 56,4	{ 55,2 55,8 55,7	
Japanwachs	50,4 bis 51,0		50,8
Cacaobutter	33,5		27,3
Muscatbutter	70 bis 80		41,7 bis 41,8
Hammeltalg	46,5 bis 47,4	32 bis 36°	um einige Grade
Rindertalg	43,5 bis 45,0	27 bis 35°	

Es geht aus diesen Zahlen hervor, daß bei den meisten Fetten nur die Bestimmung des Erstarrungspunktes sich mit einiger Genauigkeit ausführen läßt, daß aber beim Hammel- und Rindertalg auch dieses nicht gelingt, sondern daß wir von diesen Fetten nur sagen können, daß dieselben zwischen 32 und 36° respective 27 und 35° fest werden.

Ferner folgt aus dem Obigen, daß die Ermittlung des sogenannten Schmelzpunktes für die Charakteristik der betreffenden Substanz von geringer Bedeutung ist, da alle dahin zielenden Methoden einen gewissen Grad des Erweichens für Schmelzen ansehen.

Es schien mir von Interesse, einige Versuche anzustellen über den Einfluß, welchen der Zusatz eines Fettes auf den Erstarrungspunkt eines andern ausübt. Unter den von mir untersuchten Gemengen fanden sich einige, welche

eine Erniedrigung des Erstarrungspunktes zeigen, wie solche beim Rose'schen und Wood'schen Metall im hohen Maasse auftritt. Diese Gemenge zeigen einen niedrigeren Erstarrungspunkt als derjenige Bestandtheil, welcher den niedrigsten Erstarrungspunkt besitzt. Zwei dieser Gemenge, welche ein technisches Interesse besitzen, führe ich hier namentlich an. Ein Gemenge von

100 Thl. Paraffin und 10 Thl. Stearinsäure	erstarrt bei	52°,0
100 " " " 20 " " "	"	51°,2
100 " " " 30 " " "	"	50°,6
100 " " " 40 " " "	"	50°,0
100 " " " 50 " " "	"	49°,4.

Das reine Paraffin erstarrte bei 53°,0, die Stearinsäure bei 56°,0. Ein Gemenge von

100 Thl. Wallrath und 10 Thl. Stearinsäure	erstarrt bei	42°,8
100 " " " 20 " " "	"	42°,2
100 " " " 30 " " "	"	41°,5
100 " " " 40 " " "	"	41°,0
100 " " " 60 " " "	"	43°,0
100 " " " 70 " " "	"	45°,7.

Der reine Wallrath erstarrte bei 43°,4.

Es ist bemerkenswerth, daß diese Gemische sich ähnlich verhalten wie Japanwachs, Cacaobutter und andere Fette: sie zeigen die Erscheinung des Ueberkaltens in sehr deutlicher Weise, während die einzelnen Bestandtheile dieses nicht thun. Die Masse erstarrt auch nicht bei einer bestimmten Temperatur, sondern dieses geschieht ganz allmählich, während die Temperatur um viele Grade sinkt. Mit dem Erstarren eines Theiles der Mischung wird der flüssig bleibende Theil von anderer Zusammensetzung, und erlangt dadurch einen sich stets ändernden Erstarrungspunkt. Es möchte dieses Verhalten der Mischungen ganz geeignet seyn zu erklären, weshalb sich der Erstarrungspunkt des Hammel- und Rindertalgcs und anderer Fette so wenig genau bestimmen läßt, sie sind Gemenge ver-

schiedener Fette, die in ihrer Zusammensetzung durch das Erstarren eines Theiles fortwährend geändert werden.

Aus der obigen und früheren Mittheilung wird wohl zur Genüge erhellen, wie es mit der vermeintlichen Verschiedenheit zwischen Schmelz- und Erstarrungspunkt der Fette bestellt ist.

---

### VII. *Zur dynamischen Theorie der Gase;* *von Victor von Lang.*

(Aus den Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wissensch. Bd. 64, vom  
Hrn. Verf. mitgetheilt.)

---

**E**s liegt der Gedanke nahe zu versuchen, die Gleichungen, welche Clausius für die Wärmeleitung, Maxwell und Meyer für die innere Reibung der Gase erhielten, auf demselben einfachen Weg abzuleiten, auf welchem Krönig die Expansivkraft der Gase aus der fortschreitenden Bewegung ihrer Molecüle erklärte, so den Grund zur neueren Gastheorie legend. Krönig läßt nämlich die sich in Wirklichkeit nach allen möglichen Richtungen bewegendenden Molecüle nur nach drei zu einander senkrechten Axen fortschreiten.

Das angegebene Problem läßt sich nun wirklich ausführen, wenn man noch folgende Betrachtung zu Hülfe nimmt. Statt nämlich in der ganzen Ausdehnung des Gases diejenigen Molecüle aufzusuchen, die einen bestimmten Querschnitt erreichen, kann man gleich von vorne herein allen Molecülen die gleiche mittlere Weglänge  $l$  ertheilen. Dann braucht man die Molecüle, deren Entfernung von jenem Querschnitt größer als  $l$  ist, nicht weiter zu betrachten, da sie den Querschnitt ohnedieß nicht erreichen. Dagegen werden alle Molecüle, die innerhalb der Entfernung  $l$  liegen, den Querschnitt treffen.

Bevor ich nun die Formeln für die Wärmeleitung und die innere Reibung ableite, will ich noch den Druck auf die Gefäßwände in Hinsicht auf die zuletzt gemachte Bemerkung in Betracht ziehen.

Druck auf die Gefäßwand.

Wir nehmen den betrachteten Theil der Gefäßwand zur  $xy$ -Ebene und lassen die Molecüle sich nach den drei rechtwinkligen Coordinatenaxen bewegen. Bedeutet  $n$  die Anzahl der Molecüle in der Volumseinheit,  $\theta$  die Zeit, die zwischen zwei Zusammenstößen eines Molecüls verfließt, so wird eine zur  $xy$ -Ebene parallele Gasschicht in der Entfernung  $z$  und von der Dicke  $dz$  auf die Volumseinheit  $n dz$  Molecüle enthalten. Von diesen wird nur der dritte Theil gegen die Flächeneinheit der  $xy$ -Ebene stoßen, und da jedes Molecül in der Zeiteinheit  $\frac{1}{\theta}$  mal zusammenstößt, so haben wir im Ganzen den Effect von  $\frac{n}{3\theta} dz$  Molecülen auf die  $xy$ -Ebene in Betracht zu ziehen. Da nun jedes Molecül der Wand die Bewegungsquantität  $mc$  mittheilt, wo  $m$  die Masse des Molecüls,  $c$  aber die Geschwindigkeit seiner fortschreitenden Bewegung bedeutet, so ist der Druck, welcher von der Schicht  $dz$  auf die Gefäßwand ausgeübt wird,

$$\frac{nmc}{3\theta} dz = \frac{nmc^2}{3l} dz,$$

da ja die mittlere Weglänge  $l = c\theta$  seyn muß. Um nun den ganzen Druck  $p$  auf die Gefäßwand zu finden, braucht man den letzten Ausdruck nur von 0 bis  $l$  zu integrieren und erhält so die bekannte Formel

$$(1) \quad p = \int_0^l \frac{nmc^2}{3l} dz = \frac{nmc^2}{3}.$$

Bedeutet  $N$  die in dem Volumen  $v$  enthaltene Anzahl von Molecülen und setzt man die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung

$$(2) \quad \frac{mc^2}{2} = qT$$

d. i. proportional der absoluten Temperatur, so giebt die letzte Gleichung

$$(3) \quad \frac{pv}{T} = \frac{2}{3} Nq$$

oder das vereinigte Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz.

#### Innere Reibung

Wir berechnen die Reibung wieder mit Bezug auf die Flächeneinheit der  $xy$ -Ebene, indem wir annehmen, daß das Gas sich parallel der  $x$ -Axe bewege, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die in der  $xy$ -Ebene gleich  $u$ , in der kleinen Entfernung  $z$  von dieser Ebene aber gleich  $u + \frac{du}{dz}z$  ist. Die Schicht  $dz$  in dieser Entfernung enthält per Flächen- und Zeiteinheit  $\frac{n}{3\theta} dz$  Molecüle, welche in Folge der Bewegung nach der  $x$ -Axe die Bewegungsquantität

$$\frac{nm}{3\theta} \left[ u + \frac{du}{dz} z \right] dz$$

besitzen. Ist nun  $z < l$ , so gehen diese Molecüle alle durch die  $xy$ -Ebene, bis sie in eine Entfernung  $z - l$  gelangen, in welcher sie nach dem Vorhergehenden die Bewegungsquantität

$$\frac{nm}{3\theta} \left[ u + \frac{du}{dz} (z - l) \right] dz$$

besitzen. Dieselben haben also die Differenz dieser Quantitäten oder

$$\frac{nm}{3\theta} l \frac{du}{dz} dz$$

beim Durchgange verloren. Integriert man den letzten Ausdruck von 0 bis  $l$ , so erhält man den Gesamtverlust für die Flächeneinheit der  $xy$ -Ebene oder die Reibung  $R$  an dieser Stelle. Da bei der Integration  $\frac{du}{dz}$  als constant betrachtet werden kann, so giebt dieselbe

$$(4) \quad R = \int_0^l \frac{nm}{3\theta} l \frac{du}{dz} dz = \frac{1}{3} \frac{nm}{\theta} l^2 \frac{du}{dz}$$



und für den Reibungscoefficienten die Maxwell'sche Formel

$$(5) \quad \theta = \frac{\pi m}{3\theta} l^2.$$

Wärmeleitung.

Ändert sich die absolute Temperatur senkrecht zur  $xy$ -Ebene, so daß sie in dieser Ebene gleich  $T$ , in der Entfernung  $z$  aber gleich  $Tz$  ist, so ändern sich die Größen  $n$ ,  $c$ ,  $l$ ,  $\theta$  ebenfalls und man hat nach den Gleichungen (2) und (3)

$$nz = \frac{T}{T_z} n, \quad c_z = \sqrt{\frac{T_z}{T}} c,$$

ferner hat man, da nach Clausius

$$(6) \quad l = \frac{3}{4} \frac{1}{\pi s^2 n}$$

ist, unter  $s$  der Radius der Wirkungssphäre eines Molecüls verstanden,

$$l_z = \frac{n}{n_z} l = \frac{T_z}{T} l$$

$$\theta_z = \frac{l_z}{c_z} = \sqrt{\frac{T_z}{T}} \cdot \frac{l}{c}.$$

Ist die Entfernung  $z$  klein, so kann man

$$T_z = T + \frac{dT}{dz} z$$

setzen und hat somit für die lebendige Kraft derjenigen Molecüle der Schicht  $dz$ , welche sich senkrecht zur  $xy$ -Ebene bewegen, per Flächen- und Zeiteinheit

$$\frac{m n_z c_z}{6 \theta_z} dz = \frac{m n c}{6 l} \sqrt{\frac{T_z}{T}} dz = \frac{m n c^3}{6 l} \left[ 1 + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} z \right]^{-\frac{1}{2}} dz$$

und bei Vernachlässigung zweiter und höherer Potenzen der kleinen Größe  $\frac{1}{T} \frac{dT}{dz} z$

$$\frac{m n c^3}{6 l} \left[ 1 - \frac{1}{2 T} \frac{dT}{dz} z \right] dz.$$

Ist  $z < l$ , so gehen diese Theilchen alle durch die  $xy$ -Ebene bis zur Entfernung  $(z - l)$  und haben an dieser Stelle die lebendige Kraft

$$\frac{mnc^3}{6l} \left[ 1 - \frac{1}{2T} \frac{dT}{dz} (z - l) \right] dz,$$

haben somit bei ihrem Durchgange die lebendige Kraft

$$- \frac{mnc^3}{12} \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} dz$$

verloren. Integriert man noch von 0 bis  $l$ , wobei  $\frac{dT}{dz}$  als constant betrachtet werden kann, so erhält man für die ganze  $xy$ -Ebene mitgetheilte lebendige Kraft

$$- \frac{mnc^3}{12} \frac{l}{T} \frac{dT}{dz},$$

welche durch Multiplication mit einem constanten Factor  $k$  die Wärmemenge  $Q$  giebt, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit fließt. Es ist also

$$(7) \quad Q = -k \frac{mnc^3}{12} \frac{l}{T} \frac{dT}{dz}.$$

Will man noch die von  $T$  abhängigen Größen  $n$ ,  $c$ ,  $l$  auf die Normaltemperatur  $T_0$  reduciren, so hat man

$$n = \frac{T_0}{T} n_0, \quad c = \sqrt{\frac{T}{T_0}} c_0, \quad l = \frac{T}{T_0} l_0$$

und daher

$$(8) \quad Q = -k \frac{mn_0 c_0^3}{12 T_0} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \frac{dT}{dz} l_0,$$

welche Formel mit der von Clausius bis auf den Factor  $\frac{1}{12}$  stimmt, für welchen derselbe  $\frac{5}{24}$  findet.

**VIII. Das Hamilton'sche Princip und der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie;  
von C. Szily,**

Prof. d. mathemat. Physik am K. Joseph's Polytechnicum in Ofen.

(Vorgetragen in der am 11. December 1871 abgehaltenen Sitzung der ungarischen Akademie d. Wiss.)

Die Entwicklungsgeschichte der modernen Physik spricht entschieden dafür, daß nur Theorien, denen mechanische Principien zur Grundlage dienen, im Stande sind, beruhigende Erklärung der Erscheinungen zu gewähren.

Der erste Hauptsatz der Wärmetheorie hätte gewiß auch nicht so schnell sich verbreitet, und wäre nicht in kaum ein bis zwei Jahren so in alle Zweige der gesammten Naturwissenschaften eingedrungen, wenn nicht ein analoger Satz der Dynamik — der Satz von der Aequivalenz der Arbeit und der lebendigen Kraft — demselben vorausgegangen wäre. Die vollkommene Uebereinstimmung, welche zwischen dem ersten Hauptsatze der Wärmetheorie und einem Grundprincipe der Mechanik herrscht, sicherte beiden die Möglichkeit des schnellen Eindringens in alle Zweige der Physik, obzwar noch bis heutzutage die mechanischen Aequivalente des Lichtes, der chemischen Affinität und der Elektrizität nicht bekannt sind.

Der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie ist kaum um ein bis zwei Jahre jünger als der erste, seine Tragweite ist schon jetzt nicht geringer, ja wenn wir die mangelhafte Entwicklung der übrigen Zweige der Physik in Anbetracht nehmen, wird sie vielleicht noch größer als die des ersten; und dennoch, während der erste Hauptsatz, man möchte sagen, im Sturme das ganze Gebiet der Naturwissenschaften eroberte, konnte der zweite bis heute noch kaum über die Gränzen der Wärmelehre hinaus sich verbreiten.

Worin liegt die Ursache dieser auffallenden Erscheinung? Nach meiner Ansicht theilweise auch darin, daß der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie in der Mechanik kein so allgemein bekanntes, ihm verwandtes Princip fand, als der erste im Principe der Aequivalenz der Arbeit und der lebendigen Kraft. Denn drücken wir den zweiten Hauptsatz in Worten oder durch mathematische Symbole aus, so könnte man nicht sehr sagen, daß derselbe an irgend ein Princip der Mechanik erinnere.

Obwohl der analoge Satz der Mechanik bisher nicht bekannt, oder wenigstens dem der Wärmetheorie nicht gegenüber gestellt war, zweifelte dennoch kaum Jemand daran, daß eine diesem zweiten Hauptsatze ähnliche Relation auch in der Dynamik bestehen müsse; denn, wenn die Wärme nur eine besondere Art der Bewegung ist, so muß in den auf die allgemeinste Bewegung bezüglichen Gleichungen auch jede Gleichung der Wärmelehre enthalten seyn. Es war nur die Frage, *welche Gleichung der Dynamik führt in einem gewissen speciellen Fall auf den zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie*, oder umgekehrt, *auf welche Gleichung der Dynamik läßt sich der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie zurückführen*.

Der Erste, der meines Wissens sich mit dieser Frage beschäftigte, war Ludwig Boltzmann. Seine dies bezügliche Abhandlung wurde am 8. Februar 1866 der Wiener Akademie eingereicht, wo dieselbe in dem 53. Bande der Sitzungsberichte unter dem Titel: „Ueber die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie“ erschienen ist.

Unabhängig von Boltzmann und offenbar ohne das Bestehen dieser Arbeit zu kennen, hat Clausius in der am 7. November 1870 abgehaltenen Sitzung der Niederrhein. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde eine Abhandlung vorgelegt unter dem Titel: „Ueber die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien“, welche im Märzhefte 1871 dieser Annalen erschienen ist.

Das Resultat ist bei Beiden ziemlich das nämliche: „Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie läßt sich aus den Principien der analytischen Mechanik erklären. *Zu diesem Zwecke sind jedoch eigenthümliche und neue Entwicklungen nothwendig*, und die dies bezüglichen Rechnungen sind jenen, mit Hülfe derer man das sogenannte „Princip der kleinsten Wirkung“ zu beweisen pflegt, sehr ähnlich.“

Clausius untersucht vor allem andern, welcher Zusammenhang zwischen den in geschlossener Bahn vor sich gehenden periodischen Bewegungen eines materiellen Punktes besteht, conservative Kräfte, d. h. solche Kräfte voraussetzend, welche eine Kräftefunction besitzen; dann behandelt er die möglichen Ursachen der Bahnveränderung und zeigt in den verschiedenen Fällen die Geltung der aufgestellten Gleichung. Im zweiten Theile seiner Abhandlung übergeht Clausius von diesem einfachen Falle zu complicirteren, indem er annimmt, daß ein ganzes System von aufeinander wirkenden materiellen Punkten sich in geschlossenen Bahnen vor sich gehender periodischer Bewegung befinde. Sodann verallgemeinert Clausius die aufgestellte Gleichung auch für solche stationäre Bewegungen, welche nicht in geschlossenen Bahnen vor sich gehen. Die mechanische Gleichung, die Clausius auf diese Weise ableitet und mit welcher sodann der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie verglichen wird, ist die folgende:

$$\delta L = \delta \bar{T} + 2 \bar{T} \delta \log i,$$

wo  $\delta L$  jene Arbeit bedeutet, welche die conservativen Kräfte verrichten mußten, damit das System aus einer gegebenen stationären Bewegung in eine andere stationäre Bewegung übergehe;

$$\delta \bar{T} = \delta \frac{1}{i} \int_0^i \Sigma \frac{mv^2}{2} \cdot dt$$

bedeutet, die unterdessen erfolgte Veränderung der mitt-

leren lebendigen Kraft des Systemes, und  $i$  die Zeitdauer einer Bewegungsperiode.

Durch die Abhandlung von Clausius auf jene Beziehung, welche zwischen dessen Gleichung und dem Principe der kleinsten Wirkung einerseits, andererseits aber dem zweiten Hauptsatze der Wärmetheorie obwaltet, aufmerksam gemacht, habe ich es nicht für uninteressant gehalten, in gegenwärtiger Arbeit zu untersuchen, *welcher Zusammenhang zwischen dem zweiten Hauptsatze der Wärmetheorie und dem Hamilton'schen dynamischen Principe*<sup>1)</sup> — *welches sich auf variirende Wirkung bezieht* — bestehe.

Das Hamilton'sche dynamische Princip läßt sich folgendermaßen ausdrücken<sup>2)</sup>:

Wenn ein beliebiges conservatives System materieller Punkte, zwischen beliebiger Anfangs- und Endconfiguration, in beliebiger freier Bewegung sich befindet, so wird für eine unendlich kleine Aenderung dieser Bewegung ganz allgemein gelten

$$\delta A = \sum m v_1 \delta s_1 - \sum m v_0 \delta s_0 + i \delta E \quad (1),$$

wo  $m$  die Masse eines Punktes des Systems,  $\delta s_1$  und  $\delta s_0$  die Verschiebung eben dieses Punktes aus der früheren Endconfiguration in die neue, bezüglich aus der früheren Anfangsconfiguration in die neue bedeutet;  $v_1$  und  $v_0$  aber bedeutet die immer in der Richtung der Verschiebung gemessene Geschwindigkeit eben dieses Punktes in der früheren Endconfiguration und bezüglich in der früheren Anfangsconfiguration;  $i$  ist jene Zeitdauer, während welcher das System aus der ersten Anfangsconfiguration in die erste Endconfiguration übergeht.  $\delta A$  ist der Unterschied der *Wirkung* und  $\delta E$  der Unterschied der gesammten *Energie* zwischen der neuen und der früheren Bahn. Unter *Wirkung* ist das Zeitintegral der zweifachen leben-

1) Hamilton: *On a general Method in Dynamics.* (Phil. Trans. 1834).  
*Second Essay on a general Method in Dynamics.* (Ibid. 1835.)

2) Vergl. Sir W. Thomson and P. G. Tait: *Treatise on Natural Philosophy* Vol. I. pag. 235.

digen Kraft, für die Dauer, während welcher das System aus der Anfangsconfiguration in die Endconfiguration übergeht, verstanden; unter der gesammten Energie aber die Summe der in einem bestimmten Augenblick vorhandenen kinetischen und potentiellen Energie. So  $A$  wie auch  $E$  sind in einer und derselben Bahn constant, in welcher immer für einer Configuration sich auch das System befindet, aber von Bahn zu Bahn im Allgemeinen veränderlich.

Wenn die gesammte lebendige Kraft des Systemes zu einer bestimmten Zeit  $T$  ist, so ist

$$A = \int_0^i 2T \cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wenn ferner  $U$  die potentielle Energie des Systems ist in demselben Augenblicke, als  $T$  dessen lebendige Kraft, so ist die gesammte Energie

$$E = T + U.$$

Sowohl  $T$  als auch  $U$  hat an verschiedenen Punkten der Bahn verschiedene Werthe, aber die Summe der Beiden ist für alle Punkte der Bahn dieselbe constante Gröfse. Es ist daher:

$$i.E = \int_0^i (T + U) dt \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Mit Rücksicht auf die mit (2) und (3) bezeichneten Gleichungen nimmt das in (1) ausgedrückte Hamilton'sche Princip die folgende bekanntere Form an:

$$\delta \int_0^i (T - U) dt = \sum m v_1 \delta s_1 - \sum m v_0 \delta s_0 - E \delta i \quad . \quad .$$

Kehren wir wieder zur ersten Form zurück und untersuchen wir, wann die Variation der Wirkung von der Anfangs- und Endconfiguration unabhängig sey.

Dies wird dann der Fall seyn, wenn

$$\sum m v_1 \delta s_1 = \sum m v_0 \delta s_0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

d. h. wenn die Wirkung in der Zeit, während das System aus der früheren Anfangsconfiguration in die neue An-



fangsconfiguration übergeht, ebenso groß ist, als die Wirkung bei dem Uebergang des Systems aus der früheren Endconfiguration in die neue Endconfiguration.

Der Bedingung unter (4) ist z. B. Genüge geleistet, wenn die Bahnen alle von einer gemeinsamen Anfangsstellung ausgehen und in eine gemeinsame Endstellung übergehen, denn dann ist für jeden Punkt des Systems  $\delta s_1 = 0$  und  $\delta s_0 = 0$ ;

oder wenn die Bahnen geschlossen sind und die Bewegungen periodisch, denn dann ist  $\delta s_1 = \delta s_0$  und  $v_1 = v_0$  für jeden Punkt des Systems;

oder auch dann, wenn die Bahnen nicht geschlossene sind, aber die Verschiebung jedes Punktes in der Anfangs- und Endconfiguration nach der Gleichung  $v_1 \delta s_1 = v_0 \delta s_0$  vor sich geht.

Alle diese Fälle sind nur specielle Fälle, die allgemeine Bedingung ist in der Gleichung (4) gegeben.

Für den Fall, daß bei der Bewegung des Systems die Aenderung derselben der Gleichung (4) genügt, läßt sich das Hamilton'sche Princip sehr einfach ausdrücken:

$$\delta A = i \delta E . . . . . (5).$$

*d. h. die Variation der Wirkung beim Uebergange aus einer Bahn in eine andere, ist gleich dem Producte, aus der für die Zurücklegung der Bahn erforderlichen Zeit in die Variation der gesamten Energie.*

Sei  $\bar{T}$  der Mittelwerth der gesamten lebendigen Kraft, während der Zeitdauer einer Bewegungsperiode, so ist

$$i \bar{T} = \int_0^i T dt$$

und

$$A = 2 i \bar{T},$$

woraus folgt<sup>1)</sup>, daß:

$$\delta E = \bar{T} \cdot \delta \log (i \bar{T})^2.$$

- 1) Führt man diesen Werth von  $A$  in die Gleichung (5) ein, und berücksichtigt man, daß nach Gleichung (3)

$$E = \bar{T} + \bar{U},$$

Oder wenn wir das Zeichen der Variation mit dem Zeichen der Differentiation ersetzen, und den Mittelwerth der lebendigen Kraft anstatt mit  $\bar{T}$  nur einfach mit  $T$  bezeichnen, so ist

$$\frac{dE}{T} = d \log (iT)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Denken wir uns diese Gleichung für einen Kreisproceß integrirt und berücksichtigen wir, daß  $iT$  am Ende des Kreisprocesses denselben Werth hat, als am Anfange desselben, so ist

$$\int \frac{dE}{T} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Und dies ist die nämliche Gleichung, welche Clausius zuerst im Jahre 1854 als Ausdruck des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie für conservative Kreisprocesse veröffentlicht hat.

Wenn das System nicht conservativ ist, wenn also außer den Kräften mit einer Kräftefunction auch die Reibung der festen Körper, oder die Viscosität der Flüssigkeiten oder andere dergleichen dissipative Kräfte wirken, so muß in der das Hamilton'sche Princip ausdrückenden Gleichung (1) im letzten Gliede zur Variation der gesammten Energie noch die in der Ueberwindung der Widerstände verlorene Energie  $\delta R$  hinzugeschaltet werden; weshalb die Gleichung (5) in die folgende Form übergeht:

$$\delta A = i(\delta E + \delta R) \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Berücksichtigt man, daß  $\delta R$  immer verlorene Energie bezeichnet, daher dort, wo es in dieser Gleichung steht, immer positiv ist, verwandelt sich die Gleichung (7) in die folgende Ungleichung:

$$\int \frac{dE}{T} < 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

---

so folgt:

$$2i\delta\bar{T} + 2\bar{T}\delta i = i\delta\bar{T} + i\delta\bar{U}$$

und daraus

$$\delta\bar{U} = \delta\bar{T} + 2\bar{T}\delta \log i.$$

Und dieß ist die Gleichung von Clausius.

Dies ist die nämliche Gleichung, welche Clausius in der Wärmetheorie für die dissipativen Kreisprocesse aufgestellt hat.

Hiemit ist der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie zurückgeführt auf ein allgemeines Princip der Dynamik. *Was wir in der Thermodynamik den zweiten Hauptsatz nennen, ist in der Dynamik nichts anderes, als das Hamilton'sche Princip, das nämliche Princip, das in mehreren Theilen der mathematischen Physik schon bisher vielfache Anwendung fand.*

## IX. Ueber die Constanten der Gase; von Simon Šubic,

Professor an der Universität zu Graz.

### 1. Die Expansivkraft der Gase.

Nach der Theorie der Gase bewegen sich die Gasmoleküle in gerader Linie mit constanter Geschwindigkeit fort bis sie gegen andere Gasmoleküle oder gegen die Wände des Gefäßes, in welchem das Gas eingeschlossen ist, stoßen. Neben dieser fortschreitenden Bewegung hat zuerst Clausius auch eine rotirende Bewegung der Moleküle, sowie Vibrationen der Atome im Molecül angenommen und sie „Bewegungen der Bestandtheile“ genannt. Die fortschreitende Bewegung der ganzen Moleküle und die Bewegungen der Bestandtheile stehen nach Clausius bei einem bestimmten Gase im Beharrungszustande seiner Molecularbewegung in einem constanten Verhältnisse zu einander. Wenn sich ein Beharrungszustand hergestellt hat, in welchem dieses constante Verhältniß erreicht erscheint, so kann man nach Clausius die bei den einzelnen Stößen vorkommenden Unregelmäßigkeiten vernachlässigen

und annehmen, daß die Molecüle in Bezug auf die fortschreitende Bewegung den gewöhnlichen Elasticitätsgesetzen folgen.

Bei der Ableitung der Abhängigkeit der Expansivkraft der Gase von dem Volumen und der Temperatur der Gasmasse, werden nun verschiedene Vereinfachungen der Untersuchung zu Grunde gelegt. Seit Clausius die Bewegungen der Bestandtheile nachgewiesen hat, genügen die von Krönig eingeführten Vereinfachungen nicht mehr, sondern es muß erst über den Einfluß der Bewegungen der Bestandtheile entschieden werden, und Clausius hat aus seinen Betrachtungen gefolgert, daß die Erklärung der Expansivkraft, wie sie Krönig gegeben hat, durch das Hinzukommen der anderen Bewegungen keine wesentliche Aenderung erleidet. Bei der Ableitung der Expansivkraft der Gase ist auch von der Bewegung der Bestandtheile nirgends die Rede.

Aus diesem Grunde dürfte eine einfache Methode der Ableitung der Expansivkraft der Gase am Platze seyn, bei welcher über den Einfluß der Bewegungen der Bestandtheile keine Annahme nöthig erscheint. Diese Methode besteht darin, die Expansivkraft der Gase aus dem hydrodynamischen Drucke einer Flüssigkeit abzuleiten.

Nach Clausius haben im flüssigen Zustande die Molecüle keine bestimmte Gleichgewichtslage, sie können sich um ihren Schwerpunct ganz herumdrehen, und auch der Schwerpunct kann sich ganz aus seiner Lage fortbewegen, daher findet in einer Flüssigkeit eine schwingende, wälzende und fortschreitende Bewegung der Molecüle statt. In einer Flüssigkeit, deren Masse in fortschreitender Bewegung begriffen ist, haben also die Molecüle außer der fortschreitenden Bewegung auch wohl alle möglichen Bewegungen ihrer Bestandtheile an sich.

Bezeichnet man mit  $B$  die Größe einer von der strömenden Flüssigkeit senkrecht getroffenen Wandfläche, mit  $s$  das specifische Gewicht, mit  $u$  die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeit und mit  $g$  die

Acceleration der Schwere, so erleidet die fixe Wandfläche den hydrodynamischen Druck

$$D = Bs \cdot \frac{u^2}{2g}.$$

Wenn nun in einer Gasmasse, die in einem Gefäße eingeschlossen ist, der Beharrungszustand eintritt, wobei in der ganzen Masse die gleiche Temperatur und der gleiche Druck herrscht, müssen die Bewegungen der Gas-molecüle nach allen möglichen Richtungen gleich vertheilt seyn; daher kann man zur Vereinfachung der Untersuchung mit Krönig die Annahme machen, daß sich ein Drittel der sämtlichen Molecüle senkrecht zu der betrachteten ebenen Wand, und die beiden anderen Drittel nach zwei anderen zu dieser Wand parallelen Richtungen bewegen.

Wird der hydrodynamische Druck  $D$  auf die Flächeneinheit bezogen und mit  $d$  bezeichnet, so ist

$$d = s \cdot \frac{u^2}{2g}.$$

Die GröÙe  $s$  ist das specifische Gewicht oder das Gewicht der Volumeinheit der senkrecht gegen die Wandfläche strömenden Flüssigkeit. Bezeichnet man mit  $N$  die Anzahl der Gas-molecüle in der Volumeinheit, mit  $m$  die Masse des Molecüls und bedenkt, daß sich in der Gasmasse nur ein Drittel der Molecüle senkrecht gegen die betrachtete Wand bewegt, so hat man im Sinne des hydrodynamischen Druckes

$$s = \frac{N}{3} \cdot mg$$

und

$$d = \frac{N}{3} \cdot \frac{mu^2}{2}.$$

Diesen Druck erleidet die Flächeneinheit der Wand, wenn die anstoßenden Theilchen der Flüssigkeit dabei ihre Bewegung ganz verlieren, was aber bei den anstoßenden Gas-molecülen nicht der Fall ist, indem diese im Beharrungszustande bei dem Abprallen durchschnittlich ihre lebendige Kraft wieder erhalten. Dabei findet derselbe Vorgang statt,

wie bei dem Auseinanderprallen zweier elastischen Kugeln, da die geweckte Elasticität einen Rückstoß erzeugt, der an Kraft dem Anstoße gleich ist. Da die Kraft sowohl beim Anstoße als beim Rückstoße gleich  $d$  ist, so erleidet die Flächeneinheit der von der Gasmasse getroffenen Wand den Druck  $2d = p$ , also ist die Expansivkraft der Gase

$$p = \frac{N}{3} \cdot m u^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Hat die Gasmasse das Volumen  $v$  und setzt man die Anzahl ihrer Molecüle  $Nv = n$ , so erhält man den bekannten Ausdruck

$$\frac{3}{2} p v = \frac{n m u^2}{2}.$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die mit  $m$  bezeichnete Molecülmasse sowohl einfach, als auch zusammengesetzt seyn kann. Ist die Volumeinheit einmal mit  $N$  Gas-Atomen, jedes von der Masse  $m_1$  und der Geschwindigkeit  $u_1$ , das andere Mal mit ebensoviel Molecülen, jedes von der Masse  $\Sigma m$  gefüllt, und soll die Expansivkraft in beiden Fällen dieselbe seyn, so muß die Gleichung bestehen

$$\frac{\Sigma m u^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2}$$

d. h. es muß unter den angegebenen Verhältnissen die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung des einzelnen Atoms gleich seyn der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung des Molecüls.

Es können ferner die Geschwindigkeiten der einzelnen Theilchen unter sich verschieden seyn, wie bei einem gewöhnlichen fließenden Strom, dann hat man unter  $u$  die mittlere Geschwindigkeit zu verstehen, d. i. jene Geschwindigkeit, bei welcher die Molecüle denselben Druck ausüben würden, den sie bei ihren wirklichen Geschwindigkeiten ausüben.

## 2. Die Anzahl der Gas molecüle in der Volumeinheit.

Hat man zwei verschiedene Gase, deren Molecüle die Massen  $m$  und  $m_1$ , die Geschwindigkeiten  $u$  und  $u_1$  sind,

enthält die Volumeinheit des ersteren  $N$ , die des anderen  $N_1$  Molecüle, und sollen ihre Expansivkräfte  $p$  und  $p_1$  einander gleich seyn, so muß zufolge der Gleichung (1) die Bedingung erfüllt werden

$$N \cdot \frac{m u^2}{2} = N_1 \frac{m_1 u_1^2}{2}.$$

Dieser Bedingung kann auf zweifache Art Genüge geleistet werden, nämlich, es müssen entweder die lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung der Molecüle sich zu einander verhalten wie umgekehrt die Anzahl der Molecüle in der Volumeinheit, oder aber es sind die lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung der Molecüle in beiden Gasen einander gleich. Im letzteren Falle müssen beide Gase in der Volumeinheit die gleiche Anzahl Molecüle enthalten.

Bezeichnet man mit  $T$  die absolute Temperatur des Gases, so ist nach dem Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac

$$p v = R \cdot T,$$

wo  $R$  für ein bestimmtes Gas einer Constante ist. Durch die Verbindung dieser Gleichung mit (1) ergibt sich

$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{N v}{R} \cdot \frac{m u^2}{2}.$$

Hierin sind die Größen  $N$  und  $\frac{v}{R}$  Funktionen des Volumens, denn es ändert sich  $N$  mit dem Volumen und die Größe

$$\frac{v}{R} = \frac{T}{p},$$

letztere erhält jedoch unter der Voraussetzung, daß die Gase bei gleicher Temperatur dem gleichen Drucke ausgesetzt sind, einen für alle Gase constanten Werth, den wir mit  $C$  bezeichnen, so daß wir für diesen Fall haben

$$\frac{v}{R} = \frac{v_1}{R_1} = C.$$

Setzt man  $\frac{N v}{R} = \varphi(v)$  und differentiirt die Gleichung für  $T$ , so erhält man



$$dT = \frac{2}{3} \cdot \frac{mu^2}{2} \cdot d\varphi(v) + \frac{2}{3} \varphi(v) \cdot d\left(\frac{mu^2}{2}\right).$$

Nun sind von Joule<sup>1)</sup> solche Versuche ausgeführt worden, bei welchen die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molecüle constant bleibt. Joule brachte ein mit Gas gefülltes Gefäß mit einem luftleeren in Verbindung und liefs das Gas in den luftleeren Raum überströmen. Bei dieser Zustandsänderung wurde keine äufere und keine innere Arbeit bei der Ausdehnung verrichtet, und es verblieb die ganze lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung in der Gasmasse selbst, so dafs nach Herstellung des Gleichgewichtes die Molecüle die ursprüngliche mittlere lebendige Kraft besitzen mufsten. Joule hat aber durch diese Versuche nachgewiesen, dafs das Gas, nachdem es sich im ganzen Raume verbreitet und der Ruhezustand in der Masse wieder hergestellt war, wieder seine ursprüngliche Temperatur hatte. Für die angenommene Zustandsänderung ist also  $dT=0$  und  $d\left(\frac{mu^2}{2}\right)=0$ , folglich vermöge der letzten Gleichung auch

$$d\varphi(v) = 0$$

daher ist allgemein

$$\varphi(v) = \frac{Nv}{R} = \text{Const.} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und zwar für alle Gase.

Da aber in dem Falle, wenn die Gase bei gleicher Temperatur dem gleichen Drucke ausgesetzt sind, die Gröfsen  $\frac{v}{R} = C$  für sich eine Constante ist, so mufs in diesem Falle

$$N = \text{Const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

seyn für alle Gase, d. h. *bei gleicher Temperatur und unter gleichem Drucke haben alle Gase in der Volumeinheit die gleiche Anzahl Molecüle.*

Bezeichnet man die Constante  $\frac{3}{2} \cdot \frac{R}{Nv}$  mit  $h$ , so erhält man

$$hT = \frac{mu^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

1) Joule. *Phil. Mag.* Vol. XXVI. 1848.

*Bei gleicher Temperatur haben also die Molecüle aller Gase die gleiche lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung.*

Die Constante  $h$  bezeichnet die der Einheit der absoluten Temperatur entsprechende lebendige Kraft der fortschreitenden Molecularbewegung, und man kann sie daher die *Temperatur-Constante* nennen.

Sowie in der Gleichung (1) kann auch hier die Masse  $m$  sowohl als Atom, als auch zusammengesetzt als Molecül gedacht werden. Besteht daher ein Gas aus einzelnen Atomen, ein anderes aber aus Molecülen, und haben beide Gase die gleiche Temperatur, so ist in Bezug auf die fortschreitende Bewegung die lebendige Kraft des Atoms in dem ersteren gleich der lebendigen Kraft des Molecüls in dem anderen Gase. Denkt man sich die beiden Gase bei derselben Temperatur in einem Raume unter einander gemengt, so haben noch immer die einzelnen Atome bezüglich ihrer fortschreitenden Bewegung dieselbe lebendige Kraft wie die Molecüle. Wären also alle die heterogenen Atome, aus welchen die vorhandenen Molecüle bestehen, in diesem Raume einzeln durch einander gemengt, so hätten sie einzeln die gleiche lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung wie die einzelnen Molecüle. Es wäre nun zu erwarten, daß ein Beharrungszustand erst dann eintritt, wenn die in den Molecülen enthaltenen Atome die gleiche lebendige Kraft erreicht haben, wie die außer der Verbindung.

Bezüglich der in den Molecülen enthaltenen Atome hat in der That L. Boltzmann<sup>1)</sup>, aus seiner analytischen Untersuchung: „*Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolecülen*“ gefolgert, *daß die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung des Molecüls gleich ist der mittleren lebendigen Kraft jedes Atoms.*

Indem Boltzmann das Product der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung in die Anzahl

1) Boltzmann. Sitzungber. d. kais. Akademie d. Wissens. in Wien Bd. LXIII., März 1871.

der Molecüle in der Volumeinheit als Druck, die mittlere lebendige Kraft des Atoms aber als Temperatur nimmt, zieht er aus diesem seinem Gesetze die Consequenz, daß bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur für alle Gase in der Volumeinheit gleichviel Molecüle seyn müssen.

Nach der Gleichung (4) ist die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung des Molecüls als das Maafs der absoluten Temperatur anzusehen. Nach dem Boltzmann'schen Gesetze bedeutet aber die Gröfse  $\frac{mu^2}{2}$  in der Gl. (4) zugleich die mittlere lebendige Kraft jedes Atoms im Molecül, daher kann man die Gl. (4) im Sinne des Boltzmann'schen Gesetzes auch so aussprechen: die mittlere lebendige Kraft des Atoms ist als das Maafs der absoluten Temperatur anzusehen.

Clausius hat seine Ansicht über diese Frage unter andern in seiner Abhandlung „über den Unterschied zwischen activem und gewöhnlichem Sauerstoff“<sup>1)</sup> deutlich ausgesprochen, indem er sagt: „in der Abhandlung über die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen, habe ich alle Volumverhältnisse gasförmiger Körper auf den einen Satz zurückgeführt, „daß bei gleicher Temperatur die einzelnen Molecüle aller Gase in Bezug auf ihre fortschreitende Bewegung die gleiche lebendige Kraft haben.“ Wenn dieser Satz richtig ist, so müssen von allen Gasen bei gleicher Temperatur und unter gleichem Drucke in gleichen Räumen gleichviel Molecüle seyn.“

### 3. Die specifische Wärme der Gase.

Denken wir uns ein Gas, welches in der ganzen Masse die gleiche Temperatur angenommen hat und in welchem sich sonach die Molecularbewegung in einem Beharrungszustande befindet. Die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molecüle sey  $\frac{mu^2}{2}$ . Nach Clausius bestehen aber neben der fortschreitenden Bewegung

1) Clausius: „Abhandlungen“ XVIII und Pogg. Ann. 1864. Bd. CXXI, S. 250.

auch noch Bewegungen der Bestandtheile unter einander, und tritt der Beharrungszustand erst ein, wenn alle Bewegungen, welche überhaupt entstehen können, ein gewisses von der Beschaffenheit der Molecüle abhängiges Verhältniß zu einander erlangt haben. Bezeichnet man mit  $\varrho$  den bezüglichen Verhältnißfactor, so ist  $\varrho \frac{mu^2}{2}$  die mittlere lebendige Kraft der Bewegung der Bestandtheile. Daher wird die ganze mittlere lebendige Kraft  $l$  des Molecüls ausgedrückt durch

$$l = (1 + \varrho) \frac{mu^2}{2}.$$

Wird hierin für  $\frac{mu^2}{2}$  der Werth aus der Gleichung (4) substituirt, so hat man

$$l = (1 + \varrho) h T.$$

Da nach obigem  $\varrho$  für ein und dasselbe Molecularsystem constant ist, so wird die der Temperaturänderung  $dT$  entsprechende Aenderung der gesammten lebendigen Kraft des Molecüls ausgedrückt durch das Differential

$$dl = (1 + \varrho) h dT.$$

Bezeichnet man wieder mit  $N$  die Anzahl der Molecüle in der Volumeinheit, so giebt der Ausdruck

$$N dl = N (1 + \varrho) h dT$$

den Zuwachs der gesammten lebendigen Molecularkräfte in der Volumeinheit bei einer Temperaturerhöhung um  $dT$ .

Bedeutet  $\gamma$  die *wahre* spezifische Wärme der Volumeinheit des Gases (im ideellen Zustande bei const. Volumen), und  $A\gamma$  die ihr entsprechende lebendige Kraft oder Arbeit, unter  $A$  das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit verstanden, so hat man für die Temperaturerhöhung  $dT$

$$A\gamma dT = N \cdot dl$$

folglich auch

$$A\gamma = N (1 + \varrho) h . . . . . (5).$$

*Die wahre spezifische Wärme der Volumeinheit ist also eine Constante des Gases.*

Ist  $v$  das Volumen der Gewichtseinheit des Gases, so ist  $\gamma v = c$  die wahre spezifische Wärme der Gewichtseinheit (bei const. Volumen), folglich

$$Ac = Nv(1 + \varrho)h = n(1 + \varrho)h \quad . \quad (6).$$

Da die Anzahl  $n$  der Molecüle in der Gewichtseinheit für dasselbe Gas constant ist, so ist auch *die wahre spezifische Wärme der Gewichtseinheit eine Constante des Gases*.

Denkt man sich die Gase im idealen Zustande, für welchen das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac streng richtig ist, so ist die innere Arbeit im Gase als Null anzusehen. Bezeichnet man mit  $A \cdot dQ$  das von der Gewichtseinheit des Gases bei einer Temperaturerhöhung um  $dT$  aufgenommene als Arbeit ausgedrückte Wärmeelement, mit  $dW$  das zu der alleinigen Temperaturerhöhung, und mit  $dL$  das zu der gleichzeitigen äußeren Arbeit erforderliche Wärmeelement, ausgedrückt in Arbeitseinheiten, so hat man

$$AdQ = dW + dL.$$

Wird nun so viel Wärme zugeführt, daß dadurch die Temperatur der Gewichtseinheit um  $1^\circ \text{C}$ . erhöht wird, und bezeichnet man mit  $C$  die spezifische Wärme der Gewichtseinheit bei constantem Druck, mit  $c$  die wahre spezifische Wärme und mit  $\int p dv$  die entsprechende äußere Arbeit, so folgt aus der letzten Gleichung

$$AC = Ac + \int p dv.$$

Nun folgt aus dem Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetze für die Temperaturerhöhung um  $1^\circ \text{C}$ . bei constantem Drucke

$$\int p dv = R \int dT = R,$$

wo die Constante  $R$  des betreffenden Gases die äußere Arbeit ausdrückt, welche die Gewichtseinheit des Gases verrichtet, wenn sich das Gas während der Temperatur-

erhöhung um  $1^{\circ}\text{C}$ . unter Ueberwindung eines constanten äußeren Druckes ausdehnt. Substituirt man diesen Werth in die vorletzte Gleichung, so ergibt sich

$$C = c + \frac{R}{A} \dots \dots \dots (7).$$

Da nach obigem die Größen  $R$  und  $c$  Constante eines bestimmten Gases sind, so ist auch *die spezifische Wärme  $C$  der Gewichtseinheit bei constantem Druck eine Constante des Gases.*

Aus der Gleichung (7) folgt, daß auch

$$C - c = \frac{R}{A} \text{ und } \frac{C}{c} = \frac{R}{Ac} + 1$$

*die Differenz und der Quotient der specifischen Wärmen bei constantem Druck und bei constantem Volumen für ein und dasselbe Gas Constanten sind.*

In der vorstehenden Form wurde der Satz über diese Constanten zuerst von Clausius<sup>1)</sup> ausgesprochen in seiner Abhandlung: „Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen.“

Seither wurde dieser anfänglich angefochtene Satz des Clausius durch die 1853 veröffentlichten Versuche von Regnault bestätigt. Diese Uebereinstimmung der Resultate mit den Versuchen liefert wieder die Bestätigung, daß der Verhältnissfactor  $\rho$  in der That eine Constante des betreffenden Molecularsystems ist.

4. Die ganze lebendige Kraft des Gases und die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung seiner Molecüle.

Verbindet man die Gleichung

$$C - c = \frac{R}{A} \text{ mit } p v = R T,$$

so erhält man

$$A(C - c) T = p v,$$

worin  $v$  das Volumen der Gewichtseinheit des Gases bedeutet.

1) Clausius „Abhandlungen“ I. S. 43 und 44. Pogg. Annal. LXXIX, 1850.

Bezeichnet man mit  $G$  die ganze in der Gewichtseinheit des Gases bei der absoluten Temperatur  $T$  enthaltene lebendige Kraft der Molecularbewegung, so ist zufolge der Gleichung (6)

$$A c T = G.$$

Substituirt man hierin aus der voranstehenden Gleichung den Werth für  $T$ , so erhält man

$$G = \frac{c}{C-c} \cdot p v.$$

Bezeichnet man ferner mit  $F$  die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molecüle in der Gewichtseinheit, so ist zufolge der Gleichung (1)

$$F = \frac{3}{2} \cdot p v.$$

Daher ergibt sich für das Verhältniß dieser Größen der Ausdruck

$$\frac{G}{F} = \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{C-c} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k-1} \quad \dots \quad (8).$$

Die Werthe von  $G$  und  $F$  ergeben sich aber auch aus der Gleichung (6) nämlich

$$G = N v (1 + \rho) h T,$$

und wenn man anstatt  $\rho$  Null setzt

$$F = N v \cdot h T.$$

Daher hat man für dasselbe Verhältniß auch den Ausdruck

$$\frac{G}{F} = (1 + \rho) \quad \dots \quad (9).$$

Werden nun die beiden Werthe des Verhältnisses  $\frac{G}{F}$  einander gleich gesetzt, so hat man

$$(1 + \rho) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k-1} \quad \dots \quad (10).$$

Das Verhältniß  $\frac{G}{F}$  in der Form, wie es die Gleichung (8) darstellt, hat zuerst Clausius<sup>1)</sup> in seiner Abhandlung „über die Art der Bewegung, welche wir Wärme

1) Clausius. „Abhandlungen“ XIV. p. 258; Pogg. Annal. 1857. Bd. C, p. 353.



nennen“ abgeleitet und hat für jene Gase, bei welchen  $\frac{C}{c} = k = 1,41$  ist, dafür den Werth 0,615 erhalten, für dieselben Gase folgen nun aus der Gleichung (3) für  $k = 1,41$  die Werthe

$$1 + \varrho = 1,626 \quad \text{und} \quad \varrho = 0,626.$$

Nach dem Gesetze von Boltzmann ist das Verhältniß  $\frac{G}{F}$  bestimmt durch die Anzahl  $z$  der in einem Molecül des Gases enthaltenen Atome, und zwar ist darnach

$$\frac{G}{F} = z.$$

Nach Boltzmann hat also die Constante  $(1 + \varrho)^*$  zufolge der Gleichung (9) den Werth und die Bedeutung

$$(1 + \varrho) = z.$$

5. Das Product der wahren specifischen Wärme der Gase in das Molecülgewicht.

Bezeichnet man mit  $c$  und  $c_1$  die wahren specifischen Wärmen der Gewichtseinheit zweier Gase, so ergibt sich aus der Gleichung (6)

$$Nv(1 + \varrho) \cdot c_1 = N_1v_1(1 + \varrho_1) \cdot c.$$

Hierin bedeutet  $Nv$  und  $N_1v_1$  die Anzahl der Molecüle in der Gewichtseinheit, sind daher  $mg$  und  $m_1g$  die Molecülgewichte, so ist

$$Nv \cdot mg = 1 \quad \text{und} \quad N_1v_1m_1g = 1.$$

Daraus folgt

$$Nv = N_1v_1 \cdot \frac{m_1g}{mg}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in die ursprüngliche Gleichung erhält man

$$\frac{c \cdot mg}{1 + \varrho} = \frac{c_1 m_1 g}{1 + \varrho_1} \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

*Die Producte der wahren specifischen Wärme in das Molecülgewicht sind also nur für jene Gase gleich, für welche die Größe  $(1 + \varrho)$  den gleichen Werth hat.*

Für jene Gase, für die der Werth von  $k$  kleiner ist, ergibt sich aus der Gleichung (10) für  $(1 + \rho)$  ein größerer Werth als für andere, daher muß für Gase mit kleinerem Werthe  $k$  zufolge der Gl. (11) das Product  $cmg$  größer seyn. Und in der That erhält man übereinstimmend mit dieser Folgerung für die nachfolgenden Gase die beigesetzten Werthe

für die Gase

Sauerstoff	$k = 1,4026,$	$mg = 16,$	$cmg = 2,4816$
Stickstoff	" 1,4110,	" 14,	" 2,4178
Wasserstoff	" 1,4134,	" 1,	" 2,4110
Stickstoffoxydul	" 1,2497,	" 22,	" 3,9820.

#### 6. Das Boltzmann'sche Gesetz und die Erfahrung.

Im Sinne des Boltzmann'schen Gesetzes hat die Gl. (11) folgende Form

$$\frac{cmg}{z} = \frac{c_1 m_1 g}{z_1}.$$

Nach dem Gesetze von Boltzmann müßte also für diejenigen Gase, deren Molecüle die gleiche Anzahl Atome enthalten, das Product  $cmg$  eine Constante seyn. Die obigen Werthe dieses Productes für die zweiatomigen Gase, Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff, weichen in der That erst in der zweiten Decimale von einander ab und scheinen daher eine Bestätigung dieses Gesetzes zu enthalten.

Da aber Boltzmann selbst eine Consequenz hervorhebt, die mit der Erfahrung im Widerspruch steht, so erscheint eine weitere Prüfung durch die Erfahrung nothwendig.

Aus der Gleichung (10), die nach Boltzmann nachfolgende Form annimmt

$$z = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k-1},$$

ergibt sich nämlich für Gase, deren Molecüle, wie in Sauerstoff, Wasserstoff und Stickstoff zweiatomig sind,

der Werth  $k = \frac{4}{3} = 1,333 \dots$ , während die Erfahrung den Mittelwerth 1,41 liefert. Zur weiteren Prüfung dieses Gesetzes kann der Ausdruck (5) benutzt werden; derselbe erhält nach Boltzmann die Form

$$A\gamma = z \cdot Nh$$

und für ein beliebiges anderes Gas bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke

$$A\gamma_1 = z_1 \cdot Nh,$$

daher

$$\gamma : \gamma_1 = z : z_1.$$

Die specifischen Wärmen der Volumeinheit bei constantem Volumen müssen sich also zufolge des Boltzmann'schen Gesetzes zu einander verhalten, wie die Atomzahlen der Gase. Diese Consequenz des Boltzmann'schen Gesetzes läßt sich nun an Daten der Versuchsergebnisse prüfen. Wir wählen dazu die von Clausius<sup>1)</sup> aus Regnault's Daten berechneten Werthe von  $\gamma$  und die dort angezeigten Atomzahlen, wie es die folgende Tabelle ersichtlich macht.

Namen der Gase	Chemische Zusammen- setzung	$\gamma$	$z$	$\gamma : \gamma_1$	$z : z_1$
Sauerstoff	O <sub>2</sub>	1,018	2	1	1
Stickstoff	N <sub>2</sub>	0,996	2	1	1
Wasserstoff	H <sub>2</sub>	0,990	2	1	1
Chlor	Cl <sub>2</sub>	1,350	2	1,35	1
Brom	Br <sub>2</sub>	1,395	2	1,4	1
Stickstoffoxyd	NO	1,018	2	1	1
Kohlenoxyd	CO	0,997	2	1	1
Chlorwasserstoff	H Cl	0,975	2	1	1
Kohlensäure	CO <sub>2</sub>	1,55	3	1,55	1,5
Stickstoffoxydul	N <sub>2</sub> O	1,64	3	1,6	1,5
Wasserdampf	H <sub>2</sub> O	1,36	3	1,4	1,5
Schweflige Säure	SO <sub>2</sub>	1,62	3	1,6	1,5
Schwefelwasserstoff	H <sub>2</sub> S	1,29	3	1,3	1,5
Schwefelkohlenstoff	CS <sub>2</sub>	2,04	3	2	1,5
Grubengas	CH <sub>4</sub>	1,54	5	1,55	2,5

1) Clausius. „Abhandlungen“. VI. Tabelle der specifischen Wärmen S. 296.

Namen der Gase	Chemische Zusammen- setzung	$\gamma$	$z$	$\gamma : \gamma_1$	$z : z_1$
Chloroform	$\text{CHCl}_3$	3,43	5	3,4	2,5
Oelbildendes Gas	$\text{C}_2\text{H}_4$	2,06	6	2	3
Ammoniak	$\text{NH}_3$	1,37	4	1,4	2
Benzin	$\text{C}_6\text{H}_6$	5,60	12	5,6	6
Terpentinöl	$\text{C}_{10}\text{H}_{16}$	13,71	26	13,7	13
Holzgeist	$\text{CH}_4\text{O}$	2,60	6	2,6	3
Alkohol	$\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$	3,87	9	3,9	4,5
Aether	$\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$	6,87	15	6,9	7,5
Schwefeläthyl	$\text{C}_4\text{H}_{10}\text{S}$	6,99	15	7	7,5
Chloräthyl	$\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$	3,21	8	3,2	4
Bromäthyl	$\text{C}_2\text{H}_5\text{Br}$	3,76	8	3,8	4
Holländische Flüssigkeit	$\text{C}_2\text{H}_4\text{Cl}_2$	4,24	8	4,2	4
Aceton	$\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$	4,50	10	4,5	5
Essigäther	$\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$	6,82	14	6,8	7
Kieselchlorür	$\text{SiCl}_4$	4,21	4	4,2	2
Phosphorchlorür	$\text{PCl}_3$	3,39	4	3,4	2
Arsenchlorür	$\text{AsCl}_3$	3,77	4	3,8	2
Titanchlorid	$\text{TiCl}_4$	4,67	5	4,7	2,5
Zinnchlorid	$\text{SnCl}_4$	4,59	5	4,6	2,5

Da die Mehrzahl dieser Erfahrungsdaten mit der obigen Consequenz des Boltzmann'schen Gesetzes übereinstimmt, so dürften die vorkommenden Abweichungen einen außer diesem liegenden Grund haben, der mit den Vorbedingungen dieser Consequenz nicht übereinstimmt. Clausius hebt selbst hervor, daß die in seiner Tabelle enthaltenen Werthe der specifischen Wärme bei constantem Volumen nur als ein angenähertes Maaß der wahren specifischen Wärme dienen können. Unter dieser Voraussetzung sprechen also diese Erfahrungsdaten für die Richtigkeit des Boltzmann'schen Gesetzes.



**X. Untersuchungen über das gesetzmässige Verhalten der Gase und Dämpfe;  
von Prof. Ph. Gladbach in Aarau.**

Bei allen bisherigen theoretischen Untersuchungen über das Verhalten der gesättigten Wasserdämpfe, finden wir das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz zu Grunde gelegt. Obgleich nun durch Versuche nachgewiesen ist, daß bei Dämpfen die Beziehungen zwischen der Spannung, dem Volumen und der Temperatur wesentlich abweichende von denen der permanenten Gase seyen, mußte es immerhin dem aufmerksamen Beobachter auffallend erscheinen, daß selbst mit obigem Gesetze schon vielfach befriedigende Resultate erzielt wurden. Ich erinnere nur an die von Clausius und Clapeyron gegebene Berechnungsweise der Volumina gesättigter Wasserdämpfe und allen sich daran schließenden Folgerungen. Dies beweist, daß das wirkliche Verhalten der gesättigten Wasserdämpfe keine sehr bedeutende Veränderungen in dem für constant betrachteten Werthe  $R = \frac{pv}{T}$  aufweisen wird. Um nun einen Begriff von der Art dieser Veränderungen zu erlangen, hielt ich es für geeignet, eine Reihe dieser Werthe  $R$  zu ermitteln, einmal mit Zugrundelegung von Zeuner's Tabellenwerthen, ein andermal mit nach älteren Voraussetzungen berechneten Dichtigkeiten, daß nämlich das specifische Gewicht des Wasserdampfes 0,6225 von dem der Luft sey. Dabei fand sich nun, abgesehen von der Verschiedenheit der Zahlenwerthe selbst, daß beide so erzielten Tabellen in einem mit *wachsender* Temperatur *abnehmendem*  $R$  zwischen den Gränzen von 0 bis 100°C. übereinstimmen und daß in beiden die Variabilität von  $R$  von diesem Augenblicke an in eine andere übergeht. Der Unterschied der letzten Variabilität jedoch besteht darin, daß in den aus Zeuner's Tabellen berechneten Werthen  $R$  eine weitere, doch langsamere Ab-

nahme statt hat, während bei der zweiten Reihe eine Zunahme von  $R$  zu beobachten ist. Dieser hier vorgefundene *Wendepunct bei 100° C.* in dem Verhalten der gesättigten Wasserdämpfe läßt sich ebenfalls in den von Navier gegebenen beiden empirischen Formeln für die specifischen Gewichte der gesättigten Wasserdämpfe erkennen und wird sich auch in der Folge bestätigt finden.

Nach diesen Vorbereitungen machte ich den Versuch, eine Zustandsgleichung für die Dämpfe aufzustellen und kam dabei zu den folgenden Ergebnissen.

Wird einer in einem Gefäße befindlichen Flüssigkeit eine Wärmemenge  $dQ$  von außen zugeführt, so wächst die innere Wärme derselben um  $dU$ . Die gleichzeitig in Folge der Wärmezuführung eintretende Volumenveränderung von  $v$  um  $dv$  erfordert zur Ueberwindung des auf der Flüssigkeit lastenden Drucks  $p$  eine Arbeit  $p dv$ ; dies hat den Verbrauch einer bestimmten Wärmemenge zur Folge, die sich analytisch ausdrücken läßt durch  $A p dv$ , wenn  $A$  das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit bezeichnet. Die von außen zugeführte Wärmemenge  $dQ$  zerfällt demnach in

$$dQ = dU + A p dv \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Wird die Erwärmung unter constantem Druck vor sich gehend gedacht, so ist auch:

$$c dt = dU + A p dv \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wenn  $c$  die specifische Wärme der Flüssigkeit bei constantem Druck bezeichnet.

Fände hingegen die Erwärmung bei constantem Volumen statt und ist  $c_1$  die diesbezügliche specifische Wärme, so wird, da  $dv = 0$

$$c_1 dt = dU \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

seyn müssen.

Denken wir uns nun folgenden Versuch ausgeführt: Von zweien mit der gleichen Flüssigkeit gefüllten Gefäßen von gleicher GröÙe werde die eine Flüssigkeit unter constantem Druck, die andere unter constantem Volumen erwärmt und zwar so, daß die beiden Flüssigkeiten in

gleichen Zeittheilchen  $dt$  die Zunahme der inneren Wärme  $dU$  gleich groß ausfalle, so findet offenbar die Beziehung statt:

$$cdt = c_1 dt + A p dv$$

oder

$$A p dv = (c - c_1) dt \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Nach Regnault's Versuchen betrachte ich nun die spezifische Wärme bei constantem Druck als eine Function der Temperatur und setze dasselbe in Bezug auf  $c_1$  voraus, so daß allgemein

$$c = q + m t + n t^2$$

$$c_1 = q_1 + m_1 t + n_1 t^2$$

zu setzen sind.

Diese Function in (4) eingeführt, ergibt

$$A p dv = (q - q_1) dt + (m - m_1) t dt + (n - n_1) t^2 dt \quad (5).$$

Werden beide Flüssigkeiten unter gleichen Umständen von 0 auf  $dt^0$  erwärmt, so ist

$$A p dv = (q - q_1) dt$$

was ich auch schreibe:

$$\frac{p dv}{dt} = \frac{q - q_1}{A} = R \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Dieser Werth  $R$  ist offenbar gleichbedeutend mit dem des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes; denn unter der Voraussetzung, daß eine Flüssigkeit unter constantem Druck erwärmt werde, ist auch nach diesem Gesetze:

$$p dv = R dt.$$

Führen wir den Zahlenwerth  $(q - q_1) = AR$  in Gl. (5) ein, so folgt:

$$A p dv = AR \cdot dt + (m - m_1) t dt + (n - n_1) t^2 dt \quad (7).$$

Welche Spannung und Volumenveränderung unter sonst gleichen Umständen in dem einen und andern Gefäße auch stattfinden möge, so tritt immer in vorliegender Gleichung eine Constante  $(AR)_{t=0}$  auf, während doch dieser Werth  $R$  bei Dämpfen eine variable Größe ist. Diese Beobachtung führte mich zu dem Schlusse, den ich 1868 in dem „Kunst- und Gewerbeblatt des polytech. Vereins für das König-



reich Bayern“, 5. Heft, zuerst veröffentlichte; dahin lautend, daß eine constante Gröfse  $AR$  sich nur dadurch erklären lasse, daß auch  $A$  das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, eine Function der Temperatur seyn müsse.

Das Verhalten der Gase und Dämpfe definirte ich deshalb in der Gleichung:

$$\frac{Apv}{T} = AR = \text{Constante} \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Die folgenden Berechnungen mögen einen Beleg bieten für die große Wahrscheinlichkeit der hier gegebenen Zustandsgleichung:

Die nächste Frage ist die Ermittlung des constanten Werthes  $AR$ . Wir wissen, daß diese Gröfse die Bedingung  $t=0$  in sich schließt, und da in diesem Falle nach Joule  $A = \frac{1}{424}$ , so liefse sich  $R_0$  aus  $\frac{pv}{T} = R$  ermitteln, wenn das Volumen der Gewichtseinheit Dampf bei  $0^\circ$  Temperatur bekannt wäre. Um diesen letztern Werth zu finden, benutze ich unter Zugrundelegung obiger Zustandsgleichung (I) die von Clausius<sup>1)</sup> und Clapeyron gegebene Ableitung. Die bisherigen Gleichungen über das Verhalten der Gase bei *constanter Temperatur* werden dadurch nicht alterirt; indem für diesen Fall auch  $A$  und  $R$  constant sind, und so dieselben Gleichungen zum Vorschein kommen, wie mittelst des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes. Wir beginnen mit der Betrachtung eines *Kreisprocesses*.

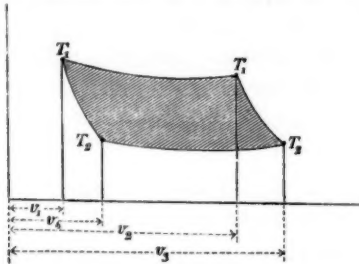
Ein Gas werde von einem Anfangszustand  $v_1$  auf  $v_2$  unter constantbleibender Temperatur  $T_1$  ausgedehnt. Dazu bedarf es einer zuzuführenden Wärmemenge von

$$Q = AR \cdot T_1 \log n \cdot \frac{v_2}{v_1},$$

wobei angenommen wird, daß diese Wärmemenge von einem unendlich großen, trotz dieser Wärmeentziehung von gleicher Temperatur bleibenden Körper ausgehe.

1) Pogg. Ann.

Der anfänglichen und constantbleibenden Temperatur  $T_1$  entspricht ein constanter Werth  $R_1$ , welchen ich in die,



während der Ausdehnung von dem Gase verrichteten Arbeit einführe; es ist:

$$L_1 = R_1 T_1 \log n \cdot \frac{v_2}{v_1}.$$

Denken wir uns die Temperatur des Gases sinke nun von  $T_1$  auf  $T_2$  ohne daß Wärme zu- noch abgeführt werde, so findet eine weitere Ausdehnung von  $v_2$  auf  $v_3$  statt und die von dem Gase verrichtete Arbeit bestimmt sich unter der Voraussetzung  $Q = 0$ , zu:

$$L_2 = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_1}{A} dT.$$

Da ich sowohl  $c_1$  und  $A$  als Functionen der Temperatur betrachte, so lasse ich das Integral, welches in der Folge aus der Entwicklung herausfällt, in gegebener Form.

Von da an werde das Gas unter constantbleibender Temperatur  $T_2$  von  $v_3$  auf  $v_4$  comprimirt. Damit das möglich sey, muß unter gleichen Voraussetzungen wie oben, demselben Wärme entzogen werden, die sich berechnet nach:

$$Q_1 = AR \cdot T_2 \log n \cdot \frac{v_3}{v_4}.$$

Die zur Compression, bei constantbleibender Temperatur  $T_2$ , nöthige Arbeit wäre:

$$L_3 = R_2 T_2 \log n \cdot \frac{v_3}{v_4}.$$

Schließlich werde das Gas von dem Zustande  $v_4 T_2$  auf den Anfangszustand  $v_1 T_1$  ohne Wärmehauf- noch -abnahme zurückgeführt, wozu es einer Arbeit bedarf von

$$L_4 = \int_{T_2}^{T_1} \frac{c_1}{A} dT.$$

Die Gesamtarbeit des Gases während des ganzen Kreisprocesses beträgt daher:

$$L = L_1 + L_2 - L_3 - L_4,$$

und da  $L_2 - L_4 = 0$ , so wird:

$$L = R_1 T_1 \log n \cdot \frac{v_2}{v_1} - R_2 T_2 \log n \cdot \frac{v_3}{v_4} \quad (8).$$

Ferner berechnet sich die während des Kreisprocesses in Arbeit verwandelte Wärmemenge zu

$$Q - Q_1 = AR \left( T_1 \log n \cdot \frac{v_2}{v_1} - T_2 \log n \cdot \frac{v_3}{v_4} \right) \quad (9).$$

In der ursprünglichen Entwicklung von Clausius wird nun nachgewiesen, daß

$$\log n \cdot \frac{v_2}{v_1} = \log n \cdot \frac{v_3}{v_4}$$

sey und mithin (8) und (9) übergehen in:

$$L = (R_1 T_1 - R_2 T_2) \log n \cdot \frac{v_2}{v_1} \quad (10)$$

$$Q - Q_1 = AR \cdot \log n \cdot \frac{v_2}{v_1} (T_1 - T_2) \quad (11).$$

Aus der bekannten Beziehung für  $Q$  und Gl. (11) folgt weiter:

$$Q - Q_1 = \left( \frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) Q \quad (12).$$

Clausius verbindet nun 10. und 11. unter der Annahme, daß  $A$  und  $R$  constant sind und findet:

$$Q - Q_1 = AL$$

während ich nun erhalte:

$$\frac{Q - Q_1}{L} = \frac{AR(T_1 - T_2)}{R_1 T_1 - R_2 T_2},$$

woraus mit Berücksichtigung von (12)

$$L = \left( \frac{R_1 T_1 - R_2 T_2}{A R \cdot T_1} \right) Q \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

welche Gleichung auch jetzt noch die volle Bedeutung hat, die man ihr bisher beilegte. Von den endlichen Aenderungen gehen wir über zu den unendlich kleinen und setzen für  $T_1$ ,  $T$ , für  $T_2$ ,  $T - dt$ ; für  $R_1$ ,  $R$  und für  $R_2$ ,  $R - dR$ ; dann geht (13) über in:

$$dL = \left( \frac{R dT + T dR}{A R \cdot T} \right) Q,$$

wobei das unendlich kleine Differential höherer Ordnung  $dR \cdot dT$  vernachlässigt ist. Auf graphischem Wege läßt sich nun auch die Arbeit durch den Inhalt eines Rechteckes darstellen, dessen Höhe  $dp$  und dessen Länge  $(v_2 - v_1)$ , so daß wir auch schreiben können:

$$dL = (v_2 - v_1) dp = \left( \frac{R dT + T dR}{A R \cdot T} \right) Q \quad . \quad (14).$$

Zur weitem Umformung dieser Gleichung denken wir uns einen Cylinder mit Wasser und Dampf gefüllt. Das Gesamtgewicht betrage 1 Kil.; das Gewicht des Dampfes sey  $m$  Kil., so wird das des Wassers  $(1 - m)$  Kil. seyn müssen. Bezeichnet ferner  $w$  das Volumen der Gewichtseinheit Wasser (hier 0,001 Cubm. per 1 Kil.),  $v$  das Volumen der Gewichtseinheit Dampf, so ist das Gesamtvolumen obiger Mischung

$$V = m v + (1 - m) w = m(v - w) + w,$$

oder wenn wir  $v - w = u$  setzen:

$$V = m u + w.$$

Für einen Anfangs- und Endzustand bei constantbleibender Temperatur also:

$$V_1 = m_1 u + w$$

$$V_2 = m_2 u + w.$$

Das Gewicht des neuentstandenen Dampfes ist demzufolge  $m_2 - m_1$  und die zugeführte Wärmemenge

$$Q = (m_2 - m_1) r,$$

wenn  $r$  die Verdampfungswärme bezeichnet.

Durch Substitution der Werthe  $V_1$ ,  $V_2$ , und  $Q$  in Gleichung (14) erhalten wir nun:

$$u dp = \frac{R dT + T dR}{A R \cdot T} \cdot r,$$

und wenn wir noch gemäß unserer Voraussetzungen, daß  $R = \frac{(AR)}{A}$  ist,  $dR = -\frac{R dA}{A}$  einführen, so wird nach einfacher Reduction:

$$u = \frac{r \left( 1 - T \frac{dA}{A dT} \right)}{A T \cdot \frac{dp}{dT}} \dots (15).$$

Vorliegende Gleichung unterscheidet sich von der von Clausius gegebenen nur durch das Glied  $T \frac{dA}{A dT}$  und geht sofort in dieselbe über, wenn  $A$  constant betrachtet wird. Dieselbe spricht aus, daß die bisher berechneten Volumina gesättigter Wasserdämpfe etwas zu groß sind, was durch einen Vergleich mit den Versuchen von Tate und Fairbairn durchaus bestätigt wird.

Gleichung (15) benutze ich nun zur Ermittlung des Werthes  $v = u + w$  bei  $0^\circ$  Temperatur. Dazu bedarf es jedoch der Annahme einer Variabilität von  $A$ . Ich setze, da der reciproke Werth von  $A$  das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit bezeichnet und nach Regnault die spec. Wärme des Wassers als Function der Temperatur bekannt ist, zwischen den Temperaturintervallen von  $0^\circ$  bis  $100^\circ$  C.

$$A = \frac{c_m}{424} = \frac{1 + 0,00004 t + 0,0000001 t^2}{424} \dots (16)$$

und für Temperaturen über  $100^\circ$  C.

$$A = \frac{c'}{424} = \frac{1 + 0,00004 t + 0,0000027 t^2}{424} \dots (17) ^1,$$

In beiden Fällen ist der Differentialquotient  $\frac{dT}{dA}$  für  $t=0$

1) Siehe diese Ann. Bd. CXL, S. 574. Ueber die Wärmecapacität des Wassers usw. von Pfaundler und Platter.

derselbe und damit auch der noch zu berechnende Werth  $R_0$ .

Da ferner für  $t = 0$ ,  $T = 273$ ,  $r = 606,5$

$$\frac{dp}{dT} = 0,338, \quad p = 4,6$$

in <sup>mm</sup> Quecksilbersäule nach Regnault, so berechnet sich aus Gleichung (15)

$$u = 202,719 \text{ mithin } v = 202,720$$

und folglich

$$R_0 = \frac{pv}{T} = 46,4458.$$

Die Zustandsgleichung I läßt sich mit Rücksicht auf (16) und (17) noch einfacher schreiben. Multiplicirt man auf beiden Seiten der Gleichung mit 424, so folgt:

$$\frac{pv}{T} = \frac{R_0}{c_\infty} \quad . . . . . \text{ II,}$$

in welcher für Temperaturen über  $100^\circ$ ,  $c'$  statt  $c_\infty$  einzuführen ist.

Es möge nun eine Zusammenstellung der mit meinem Gesetze erzielten Werthe für die Volumina gesättigter Wasserdämpfe, der Versuchswerthe von Tate und Fairbairn<sup>1)</sup> und der darauf bezüglichen Werthe von Clausius<sup>2)</sup> folgen; wobei jedoch zu bemerken ist, daß Clausius in seine Formel  $A = \frac{1}{421}$  einführte.

1) *Proceedings of the Roy. society* 1860.

2) *Bulletin de la société d'encouragement* 1861 p. 496.

Tabelle I. (Temperaturen unter 100° C.)

$t^{\circ}$ Celsius	$T$ Absolute Temperatur	$P$ Spannung in mm	$c_m$ *) Mittlere specifische Wärme	Volumina.		
				Gl. II.	Tate und Fairbairn	Clausius
58,205	331,20	136,00	1,002	8,300	8,266	8,23
68,516	341,516	218,94	1,002	5,317	5,326	5,29
70,755	343,75	240,03	1,002	4,882	4,914	4,83
77,490	350,49	320,29	1,003	3,726	3,717	3,69
79,400	352,40	346,00	1,003	3,468	3,433	3,43
83,500	356,5	406,65	1,003	2,986	3,046	2,94
86,833	359,83	466,34	1,004	2,625	2,620	2,60
92,655	365,65	581,15	1,004	2,140	2,146	2,11
100	373	760	1,005	1,668	1,670	—

\*) Diese  $f(t)$  die ich fand, nachdem Tabelle II berechnet war, ist ganz dieselbe, welche Regnault für die mittlere specifische Wärme des Wassers angiebt, dort aber in der Form:

$$1 + 0,00002 t + 0,0000003 t^2$$

geschrieben ist, wie aus Tabelle I ersichtlich.

Tabelle II. (Temperaturen über 100° C.)

Temperatur $t^{\circ}$ Cels.	Absolute Temp. $T=273+t$	Spannung in mm Quecksilbersäule	Spec. Wärme $c'$	Volumina aus Gl. II.	Tate und Fairbairn	Clausius
117,17	390,17	1361,694	1,0416	0,940	0,941	0,947
118,233	391,233	1410,208	1,0423	0,909	0,906	0,917
118,455	391,455	1419,606	1,0426	0,903	0,891	0,911
124,166	397,166	1697,736	1,0465	0,763	0,758	0,769
128,41	401,41	1935,48	1,0496	0,675	0,648	0,681
130,67	403,67	2070,86	1,0513	0,633	0,634	0,639
131,78	404,78	2138,68	1,0521	0,614	0,604	0,619
134,866	407,866	2342,64	1,0545	0,564	0,583	0,569
137,455	410,455	2529,84	1,0564	0,524	0,514	0,530
139,21	412,21	2655,316	1,0578	0,501	0,496	0,505
141,805	414,805	2864,612	1,0599	0,466	0,457	0,472
142,36	415,36	2902,00	1,0604	0,460	0,448	0,465
144,74	417,74	3105,15	1,0623	0,432	0,432	0,437

Unverkennbar zeigt sich in diesen Zahlen ein bis dahin noch unbekannt gewesener Zusammenhang zwischen der specifischen Wärme der Flüssigkeit und der Temperatur, Spannung und dem Volumen der aus ihr erzeugten Dämpfe. Ferner ist ersichtlich, daß bei gegebenen Volumina, sich mit Hülfe meines Gesetzes die specifische Wärme des Wassers berechnen läßt, wobei die Versuchswerthe Regnault's eine glänzende Bestätigung finden.

Aarau, den 8. December 1871.

# **XI. Stoßversuche mit Kugeln aus verschiedenem Metall; von Heinrich Schneebeil.**

In meiner Mittheilung über den Stoß elastischer Körper (diese Annalen Bd. 143, S. 239) sind die Stoßverhältnisse untersucht, die eintreten, wenn wir ein und dasselbe Material benutzen und den Stoß unter verschiedenen Bedingungen vor sich gehen lassen. Das dort benutzte Material war glasharter Stahl, ein äußerst elastischer Körper. Es wurde die Abhängigkeit der Stoßzeit sowohl von der *Masse*, *Länge* als auch *Fallhöhe* des stoßenden Körpers etc. wenigstens qualitativ bestimmt.

In der vorliegenden Mittheilung sind nun die Resultate enthalten, die ich beim Stoß mit Kugeln aus verschiedenen Metallen erhielt.

Die Beobachtungsmethode war genau dieselbe, wie ich sie in der obigen Abhandlung beschrieben habe. Die Kugeln hatten alle dasselbe Gewicht und wurden von derselben Höhe gegen die glasharte und feinpolirte Stirnfläche eines festen Stahleylinders fallen gelassen. Allerdings hatten die Kugeln nun nicht alle denselben Radius und mußte also hiefür, um die Verhältnisse gleich zu machen, eine Correction angebracht werden, da die Stoßzeit ab-



hängt vom Radius der Krümmungsfläche. Indessen geht aus den a. a. O. mitgetheilten Zahlen hervor, daß diese Correction sehr klein ausfallen würde (Blei u. Zink  $2\frac{1}{2}$  Proc.) und jedenfalls gegen die bei diesen Metallen vorkommenden Unvollkommenheiten (Ueberschreitung der Elasticitätsgränze) wohl vernachlässigt werden darf.

Nämlich selbst bei den hier benutzten sehr kleinen Fallhöhen von etwa  $10^{\text{mm}}$  erhielten die weichern Metalle eine kleine permanente Deformation, die jedenfalls das Resultate compliciren muß. Man liefs auch deshalb, um die Versuche durchaus homogen zu haben, die Kugeln stets mit einer frischen Stelle aufschlagen.

Zuerst untersuchte ich den Einfluß, den der Thermostrom, hervorgehend aus der Berührung heterogener Metalle bei etwaiger Temperaturdifferenz, auf den Ausschlag der Nadel haben könnte. Wurde diese Quelle eines Stromes direct mit dem Galvanometer verbunden und die Kugel mit der Stofsfläche in Berührung gebracht, so schlug die Nadel selbst bei nicht merkbarer Temperaturdifferenz (etwa herrührend von der Berührung mit der Hand) bis auf 100 Scalentheile aus, sobald der Contact längere Zeit hergestellt wurde. Blieb aber die Kugel nur während der Stofszeit an der Stofsfläche, so war absolut kein Strom wahrzunehmen, selbst wenn die Kugel bis 10 mal nacheinander gegen die feste Ebene pendelte.

Um indessen zur Evidenz zu zeigen, daß der hier entstehende Thermostrom die Resultate nicht beeinflusste, wurde die Kugel bis auf etwa  $200^{\circ}$  erhitzt und nun der Stofs vorgenommen. Selbst in diesem Falle konnte keine Bewegung der Nadel wahrgenommen werden, auch wenn der Stofs rasch nacheinander wiederholt wurde. Die Versuche mit der erwärmten Silberkugel wurden auch bei eingeschalteten Hydroelementen wiederholt; freilich zeigte sich hier eine Zunahme der Berührungszeit beim Stofs, als die Kugel erwärmt wurde; indessen ist diese Zunahme des Ausschlages nicht einem Thermostrom zuzuschreiben, sondern, wie aus dem Folgenden hervorgeht, einer Abnahme der

Elasticität mit wachsender Temperatur. — Man benutzte zu den Versuchen folgende Metallkugeln von ungefähr 250 Grm., die gegossen und nachher abgedreht waren:

Kugel	Elasticitätscoefficient <i>E</i> .
Stahl	19600
Kupfer	10500
Zink	8700
Messing	8540
Silber	7140
Zinn	4000
Blei	1700

Ich will von den zahlreichen Versuchsreihen zwei mittheilen und hier nochmals erwähnen, daß die Kugeln alle von derselben Höhe gegen den Stahlstab fallen gelassen wurden.

Kugel	Ausschlag des Galvanometers <i>a</i>	
	I. Reihe	II. Reihe
Stahl	72,5	84,2
Kupfer	94,2	115,0
Zink	111,0	130,0
Messing	110,5	127
Silber	112,0	130
Zinn	164	194
Blei	270	320

Die erste Reihe wurde ausgeführt den 11. Januar, die zweite den 22. Januar.

Als allgemeines Resultat ergibt sich aus diesen beiden Reihen, *daß die Stofszeit zunimmt, wenn der Elasticitätscoefficient abnimmt*. Ein näherer Zusammenhang zwischen Stofszeit und Elasticitätscoefficient ergibt sich, wenn man das Product aus Stofszeit und der Wurzel aus dem Elasticitätsmodulus der betreffenden Kugel bildet. Man erhält alsdann folgende Tabelle:

Kugel	I. Reihe.				Reihe II.		
	$\sqrt{E}$	$a$	$a\sqrt{E}$	Corr.	$a$	$a\sqrt{E}$	Corr.
Stahl	140	72,5	101,5	+ 0,5	84,2	117,9	+ 2,1
Kupfer	102	94,2	96,1	+ 5,9	115,0	117,3	+ 2,7
Zink	93,3	111,0	103,6	- 1,6	130	121,3	- 1,3
Messing	92,4	110,5	102,1	- 0,1	127	117,4	+ 2,6
Silber	84,5	112	94,6	+ 7,4	130	110,0	+10
Zinn	63	164	103	- 1,0	194	122	- 2
Blei	42	270	113	-11	320	134	-14
Mittel 102,0					Mittel 120,0		

Wir dürfen aus dieser Tabelle mit voller Berechtigung den Schluss ziehen:

*Stößt eine Reihe von elastischen Körpern gegen dieselbe elastische Fläche, so sind die Stofszeiten umgekehrt proportional der Wurzel aus ihren Elasticitätscoefficienten.*

Alle die hier benutzten Metalle stimmen mit ziemlicher Annäherung mit dem obigen Gesetz, mit Ausnahme der Silber- und Bleikugel. Was die Bleikugel anbetrifft, so darf uns diese Nichtübereinstimmung nicht überraschen, denn die Elasticität des Blei's ist so gering, daß selbst bei diesen kleinen Fallhöhen die Elasticitätsgränze sehr überschritten wird. Bei der Silberkugel muß ich annehmen, daß ihr Elasticitätscoefficient ein wesentlich größerer ist, als bei dem Material, das zur Bestimmung des Coefficienten benutzt wurde. Diese Vermuthung ist wohl in Betracht der ziemlich bedeutend abweichenden Resultate verschiedener Beobachter nicht ungerechtfertigt.

Zürich, den 10. Febr. 1872.

## XII. Ein Collector für Frictionselektrisirmaschinen; von Dr. H. Emsmann in Stettin.

Der Condensator in dem Rühmkorff'schen Funken-inductor, der so wirksam ist und dabei an der Maschine doch nur einen geringen Raum beansprucht, hat in mir den Gedanken angeregt, daß auf ähnliche Weise an der gewöhnlichen Frictionselektrisirmaschine sich ein compendiöser, aber dennoch bedeutend wirkender *Collector* müßte herstellen lassen.

Dies ist vollständig gelungen. Auf billige Weise ist das erreicht worden, was an den Winter'schen Elektrisirmaschinen der immerhin auffallende und verhältnißmäßige — jetzt unverhältnißmäßig — theure Ring leistet.

Mein ursprünglicher Gedanke war, den Collector durch einen langen Streifen von Stanniol herzustellen, der — zwischen zwei übergreifende Streifen von Isolirpapier gefaltet und in ein etwa octavgroßes Futteral von Isolirpapier eingeschlossen werden sollte. Diesen Collector beabsichtigte ich auf dem Conductor der Maschine selbst — wie den Ring Winter's — oder auf der Leitung von den Saugern zu dem Conductor anzubringen.

Der hiesige, sehr strebsame und geschickte Mechanicus Hr. Kuhlo, welchen ich zur Ausführung meiner Idee ermunterte, hat nun den *Collector* in der Weise ausgeführt, daß er mehrere, an einem Ende zugeblasene Glasröhren, von denen die weiteste etwa 5 Centim. Durchmesser hält, in einander steckte. Mit Ausnahme der weitesten Röhre, die nur als isolirende Hülle dient, sind sämmtliche (3 bis 5) Röhren außen mit Stanniol beklebt; die Ränder der offenen Enden liegen in einer Ebene, und an diesen Enden sind sämmtliche Stanniolbelege unter sich vereinigt und mit dem Conductor der Maschine in leitende Verbindung gebracht, so daß der Collector nach Belieben aufgesetzt oder abgenommen werden kann.

Die Wirkung ist eine überraschende. Der *Collector* leistete noch mehr als der Winter'sche Ring, als er an dessen Stelle auf die Maschine, welche mit einem solchen versehen war, gesetzt wurde.

Es läßt sich dieser einfache und billige *Collector* an jeder Frictionsmaschine leicht anbringen, so daß man an einer jeden auf einfache und billige Weise dieselben Wirkungen erzielt, durch welche sich die Winter'schen Ringe bisher auszeichneten.

Stettin, Febr. 1872.

### XIII. Die Elektrophormaschinen betreffend.

Es war mir erfreulich, im 144. Bd. d. Annal. einer Ansicht über die Holtz'sche Maschine zu begegnen, die ich 1867 aufgestellt und seitdem bei allen Versuchen, fremden wie eigenen, durchaus bestätigt gefunden habe. Hr. Schwedoff adoptirt, wie aus seiner Beschreibung des Spiels der Maschine (S. 601) hervorgeht, meine Ansicht, daß die Maschine im Wesentlichen ein drehbarer Doppel-Elektrophor ist, dessen mit Cartonspitzen versehene Kuchen, nach einem bekannten Versuche, durch Influenz fortwährend Elektrizität erhalten. Hr. Schwedoff weicht nur in dem für diese Ansicht völlig gleichgültigen Punkte von mir ab, daß er die Influenz auf die Cartonspitzen nicht von der Vorderfläche<sup>1)</sup>, sondern von der Hinterfläche der gedrehten Scheibe ausgehen läßt. Es ist dies die natürlichste, sich im ersten Augenblicke darbietende Annahme; ich

1) Hr. Schwedoff nimmt Anstoß an dieser in der Wissenschaft gebräuchlichen Bezeichnung. An dem Objective eines Fernrohrs wird die dem Lichte zugewandte Fläche Vorderfläche genannt, auch wenn sie für den Beobachter die Hinterfläche ist.

habe sie erst nach Anstellung vieler Versuche fallen lassen, die in den Berichten der Akademie 1867 in zwei Aufsätzen beschrieben sind und darthun, daß eine nichtleitende Platte, die auf Einer Fläche in irgend einer Weise Elektricität erhalten hat, auf der entgegenliegenden Fläche durch Influenz elektrisch wird. Hr. Schwedoff glaubt diese Elektrisirung durch einen Versuch widerlegen zu können (S. 599 flgd.), der gerade nur hinreicht, die von ihm S. 600 gemachte, ersichtlich falsche Voraussetzung zu widerlegen, daß, um eine einseitig elektrisirte Glasscheibe zu entladen, ihre beiden Flächen entladen werden müssen, im Falle, daß sie auf beiden Flächen elektrisch wäre. Bekanntlich verschwindet mit der influenzirenden auch die influenzirte Elektricität, so daß es zur Entladung der Platte hinreicht, die erste Elektricität abzuleiten. Auf diesen rohen Versuch gestützt behauptet Hr. Schwedoff, daß meine Erklärung der Wirkung der Holtz'schen Maschine nicht mit den Thatsachen übereinstimme und wiederholt im Wesentlichen meine Erklärung mit der Aenderung, daß er die Cartonspitzen der Kuchen durch die Elektricität der Hinterfläche der rotirenden Scheibe erregen läßt, statt durch die gleichnamige Elektricität der Vorderfläche.

Für die so oft nöthige praktische Anwendung meiner Erklärung zum Verständnisse der Elektrophormaschinen ist dieser Differenzpunkt ohne alle und jede Bedeutung. Für die theoretische Anwendung ist er nicht gleichgültig und ich bemerke darüber Folgendes. Die Elektricität der Vorderfläche der gedrehten Glasscheibe einer Elektrophormaschine ist eine Thatsache; Hr. Schwedoff läugnet sie nicht, er hält nur ihre Menge für sehr klein (S. 602), weil sie von der elektrischen Ausströmung der Cartonspitzen herrühre. Hätte die Elektricität der Vorderfläche diesen Ursprung, so würde sich aus äußern Merkmalen an den Cartonspitzen schließen lassen, daß ihre Menge nicht klein seyn kann. Es ist aber leicht zu zeigen, daß sie diesen Ursprung nicht hat. Rührte jene Elektricität von den Cartonspitzen her, so müßte eine alte Holtz'sche Ma-

schine (mit 2 Kuchen und 2 Kämmen) erregbar bleiben, nachdem an der Hinterfläche der rotirenden Scheibe ein abgeleiteter Metallkamm (überzähliger Conductor) angebracht worden ist. Es ist aber bekannt, daß mit diesem Conductor die Maschine sich nicht erregen läßt, man möge den Versuch fortsetzen, so lange man will. Ich halte aus Gründen die Elektricität der Vorderfläche der Scheibe für eine durch Influenz ihrer Hinterfläche erregte und für gerade stark genug, um die Cartonspitzen mit Elektricität zu versehen. Daß unter günstigen Umständen die durch Influenz der elektrisirten Fläche einer nichtleitenden Scheibe auf der entgegenliegenden Fläche erregte Elektricität ausnehmend stark ist, habe ich früher durch einen leicht zu wiederholenden Versuch gezeigt. Eine Pechplatte war mit einer Glimmerscheibe bedeckt, auf die ein kleiner Metallcylinder gestellt war, der einen schwachen elektrischen Funken erhielt. Dadurch war auf der Pechplatte eine große sehr scharf ausgebildete Staubfigur entstanden, ganz so, als ob Elektricität durch einen Funken direct auf die Platte gebracht worden wäre. Die durch die elektrisirte obere Glimmerfläche durch Influenz auf der untern Fläche erregte Elektricität hatte eine so große Dichtigkeit, daß der mit der erregenden Elektricität gleichnamige Theil derselben auf die Pechfläche übersprang.

An dem drehbaren Metallstabe der neuesten Holtz'schen Maschine, an dessen Enden die beiden schrägen Kämme befestigt sind, habe ich die Bestimmung erkannt, die beiden Kämme unelektrisch zu erhalten. Hr. Schwedoff hat nicht wohl daran gethan, Dies so auszudrücken, daß wenn Ein Kamm, durch Influenz erregt, die eine Elektricität, der gegenüberstehende nicht influenzirte Kamm, die andere Elektricitätsart ausströmen läßt (S. 601). Dadurch erscheint es nämlich, als ob Hr. Schwedoff die Isolirung jenes Stabes für unbedingt nothwendig gehalten und meine Bemerkung hinter der von ihm S. 598 citirten Stelle übersehen habe, daß der Stab mit Vortheil zur Erde abgeleitet wird. Wer eine Unbequemlichkeit nicht scheut,

kann den Metallstab ohne Nachtheil entbehren, die beiden Kämme durch ein anderes Mittel einzeln festlegen und durch lange Drähte zur Erde ableiten. R.

#### XIV. *Historisches.*

Vor etwa 18 Jahren (Ann. Bd. XCII, 1854, S. 179) beschrieb ich eine Fallmaschine, mittelst welcher in anschaulicher Weise gezeigt werden kann, daß Körper beim Heben (so zu sagen) schwerer, und beim Senken leichter sind als im Zustand der Ruhe, — eine Thatsache, die in physikalischen Kreisen auch jetzt noch nicht so allgemein bekannt seyn dürfte als sie es zu seyn verdient. Um so mehr hat es mich kürzlich überrascht, zu finden, daß dieselbe schon vor sehr langer Zeit ausgesprochen worden ist.

In einem Werke über die hydrostatische Waage, betitelt: *Buch der Waage der Weisheit*, verfaßt von dem Araber Al-Khazini im zwölften Jahrhundert, und übersetzt von Hrn. N. Khanikoff, weiland Russischem General-Consul zu Tabriz in Persien, zunächst ins Französische, und dann, ins Englische übertragen, zusammen mit dem arabischen Original veröffentlicht im *Journ. of the American Oriental Society*, Vol. VI (1859), findet sich nämlich p. 36 folgende bemerkenswerthe Stelle:

„The weight of any heavy body, of known weight at a particular distance from the centre of the world, varies according to the variation of its distance therefrom; so that, so often as it is removed from the centre, it becomes heavier, and when brought nearer to it, is lighter.“

Ein Beweis dieses Satzes wird nicht gegeben; auch wird nicht gesagt, von wem er herstammt; möglicherweise könnte er schon bei den Alten vorkommen. P.